

Н. А. ФРОЛОВ

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ЧАСТЬ 2

ПОСОБИЕ
ДЛЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ

*Утверждено
Министерством просвещения РСФСР*

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

Москва 1963

ПРЕДИСЛОВИЕ

По своему содержанию второе издание «Курса математического анализа», ч. 2, почти не отличается от первого издания. Только в некоторых местах книги имеются изменения, главным образом редакционного характера.

Автор

ГЛАВА I

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 1. Основные понятия

Решение многих задач связано с суммированием бесконечного множества чисел. Уже в элементарной математике рассматривается задача о сумме всех членов бесконечной геометрической прогрессии:

$$u, uq, uq^2, \dots, uq^{n-1}, \dots$$

Понятие суммы в этой задаче вводится следующим совершенно разумным путем.

Сначала берут первый член прогрессии. К нему прибавляют второй член. Затем к сумме первых двух членов прибавляют третий член. Продолжая этот процесс дальше, следят за изменением суммы $S_n = u + uq + \dots + uq^{n-1}$ с возрастанием числа слагаемых n . Если S_n при неограниченном возрастании n стремится к определенному числу S , то под суммой всех членов бесконечной прогрессии понимают именно это число S .

Так как из равенств

$$\begin{aligned} S_n &= u + uq + \dots + uq^{n-1}, \\ S_n q &= uq + uq^2 + \dots + uq^n \end{aligned}$$

вытекает

$$S_n - S_n q = u - uq^n$$

и

$$S_n = \frac{u(1 - q^n)}{1 - q},$$

если только $q \neq 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} \frac{u}{1-q}, & \text{если } |q| < 1, \\ \infty, & \text{если } |q| > 1. \end{cases}$$

Если $q = 1$, то все члены данной прогрессии равны u ; в этом случае $S_n = nu \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Если же $q = -1$, то, очевидно, $S_{2k-1} = u$, $S_{2k} = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), и поэтому сумма S_n при $n \rightarrow \infty$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.

Следовательно, о сумме всех членов данной геометрической прогрессии (в принятом нами смысле) можно говорить только тогда, когда знаменатель прогрессии q удовлетворяет условию: $|q| < 1$, т. е. когда геометрическая прогрессия — убывающая. В этом случае мы имеем:

$$u + uq + \dots + uq^{n-1} + \dots = \frac{u}{1-q}.$$

Члены бесконечной геометрической прогрессии образуют некоторую последовательность. Поэтому является естественным прием суммирования членов прогрессии сделать общим приемом суммирования членов произвольной последовательности чисел, вводя понятие суммы и в этом общем случае совершенно так же, как и в случае геометрической прогрессии. Такое обобщение приводит нас к понятию числового ряда и к другим, связанным с ним, понятиям.

Пусть мы имеем последовательность чисел:

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

Соединяя члены данной последовательности знаком сложения в том порядке, в каком они содержатся в последовательности, мы получим выражение

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (1)$$

которое называется числовым рядом.

Числа $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ называются членами ряда, u_n — общим членом ряда.

Сумма первых n членов ряда называется n -й частичной суммой ряда и обозначается через S_n :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Если при неограниченном возрастании n частичная сумма S_n ряда (1) имеет конечный предел, то ряд (1) называют сходящимся, а число

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ — суммой ряда и пишут}$$

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

Если же S_n при $n \rightarrow \infty$ не имеет конечного предела, то ряд (1) называется расходящимся.

Результаты, полученные выше при решении вопроса о сумме бесконечной геометрической прогрессии, показывают, что геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} uq^{n-1}$ сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$. В случае $|q| < 1$ имеем:

$$\frac{u}{1-q} = u + uq + uq^2 + \dots + uq^{n-1} + \dots$$

Ряды

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

и

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m} + \dots \quad (2)$$

сходятся или расходятся одновременно. Действительно, частичная сумма S'_m второго ряда всегда может быть представлена в виде частичной суммы S_{n+m} первого ряда

минус постоянная величина $A = \sum_{k=1}^n u_k$, т. е.

$$S'_m = S_{n+m} - A.$$

Отсюда и видно, что при $m \rightarrow \infty$ частичная сумма S'_m имеет или не имеет предел одновременно с частичной суммой S_{n+m} .

Если ряды (1) и (2) сходятся, то сумма второго ряда называется n -м остаточным членом первого ряда и обозначается через R_n :

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

Очевидно, что сумму сходящегося ряда всегда можно представить в виде

$$S = S_n + R_n,$$

откуда следует, что $R_n \rightarrow 0$, если $n \rightarrow \infty$.

Пользуясь определениями сходимости и суммы ряда и теоремами о пределах, легко доказать следующие предложения:

1. Если c — некоторое число, а ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

сходится и имеет сумму S , то ряд

$$cu_1 + cu_2 + \dots + cu_n + \dots$$

также сходится и имеет сумму cS .

2. Если ряды

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \\ v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \end{aligned}$$

сходятся и имеют соответственно суммы U и V , то ряд

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \dots + (u_n \pm v_n) + \dots$$

также сходится и имеет сумму $U \pm V$.

В случае сложения это утверждение верно для любого конечного числа сходящихся рядов.

§ 2. Необходимое и достаточное условие сходимости

По определению сходимость ряда

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

заключается в существовании предела S частичной суммы ряда S_n при неограниченном возрастании номера n , т. е. в сходимости последовательности частичных сумм

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots; \quad (2)$$

поэтому условием сходимости ряда (1) является условие сходимости последовательности (2). В силу критерия Коши существования предела последовательности мы можем сказать, что последовательность (2) сходится к пределу тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что для всех $n > N$ и $m > N$ верно неравенство

$$|S_m - S_n| < \varepsilon.$$

Положим для определенности $n < m = n + p$. Тогда имеем:

$$S_m - S_n = S_{n+p} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p},$$

причем здесь p может быть любым натуральным числом, так как m и n должны быть только большими N , а между собой могут отличаться как угодно. Отсюда получим следующую формулировку условия сходимости ряда:

Для сходимости ряда

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N , что при всех $n > N$ справедливо неравенство

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon,$$

каким бы натуральное число p ни было.

Это условие называют условием или критерием Коши. Отсюда при $p = 1$, в частности, вытекает, что для сходимости ряда необходимо, чтобы при всех $n > N$ было верно неравенство

$$|u_{n+1}| < \varepsilon,$$

а это означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Таким образом, приходим к выводу:

Для сходимости ряда необходимо, чтобы общий член ряда стремился к нулю, когда его номер неограниченно возрастает.

Это условие, будучи необходимым, оказывается, не является достаточным для сходимости ряда. В этом нас убеждает ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

который называется гармоническим.

Здесь $u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$; однако можно доказать, что гармонический ряд не удовлетворяет критерию Коши (который является не только достаточным, но и необходимым признаком сходимости) и поэтому не может быть сходящимся. Для этого заметим, что

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} > \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}.$$

Отсюда видно, что если $\epsilon < \frac{1}{2}$, а $p = n$, то для гармонического ряда неравенство

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} < \epsilon$$

неверно, каким бы большим номер n ни был. Следовательно, в случае гармонического ряда не для каждого $\epsilon > 0$ можно найти такой номер N , о котором говорится в условии Коши; поэтому гармонический ряд расходится.

Это и доказывает, что условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

является только необходимым, но недостаточным признаком сходимости ряда.

§ 3. Абсолютная и условная сходимость

Введем еще два понятия.

Ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots, \quad (2)$$

образованный из абсолютных величин членов данного ряда.

При сходимости ряда (2) ряд (1) не может быть расходящимся, так как

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}|,$$

и поэтому, если условию Коши удовлетворяет ряд (2), то этому условию удовлетворяет и ряд (1).

Таким образом, когда ряд (2) сходится, тогда сходится и ряд (1), причем его в этом случае мы называем абсолютно сходящимся, желая этим подчеркнуть, что его сходимость обеспечивается достаточно быстрым стремлением к нулю абсолютной величины общего члена, а не обусловлена наличием членов разных знаков, которые при достаточно больших номерах начинают каким-то образом компенсировать друг друга, заставляя тем самым частичную сумму ряда стремиться к конечному пределу.

Ряд (1) называется условно сходящимся, если он сходится, а соответствующий ему ряд (2) расходится.

На практике обычно бывает трудно решить вопрос о сходимости данного ряда при помощи критерия Коши. Поэтому важно иметь достаточные признаки сходимости и расходимости, которыми было бы удобно пользоваться при исследовании рядов. Здесь мы получим некоторые из таких признаков.

Прежде всего мы рассмотрим знакочередующиеся ряды, у которых любые рядом стоящие два члена противоположны по знаку.

Теорема Лейбница. Если ряд знакочередующийся и абсолютная величина n -го члена ряда монотонно стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то данный ряд сходится по крайней мере условно.

Доказательство. Пусть дан знакочередующийся ряд

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots, \quad (3)$$

удовлетворяющий условиям

$$u_1 > u_2 > \dots > u_n > \dots$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Рассмотрим последовательность $\{S_{2k}\}$ частичных сумм данного ряда с четными номерами.

Из соотношения

$$S_{2k} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2k-1} - u_{2k}) \quad (4)$$

видим, что последовательность $\{S_{2k}\}$ возрастающая, так как для всех n по условию $u_n > u_{n+1}$, и поэтому все разности в правой части (4) положительны.

Но в то же время

$$S_{2k} = u_1 - (u_2 - u_3) - \dots - (u_{2k-2} - u_{2k-1}) - u_{2k}, \quad (4')$$

откуда видно, что последовательность $\{S_{2k}\}$ ограничена сверху:

$$S_{2k} < u_1$$

для всех k .

Поэтому $\{S_{2k}\}$, как всякая возрастающая и ограниченная сверху последовательность, имеет предел:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = S.$$

Так как

$$S_{2k+1} = S_{2k} + u_{2k+1}$$

и по условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{2k+1} = 0,$$

то имеем:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = S.$$

Следовательно,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

а это означает, что данный ряд (3) сходится.

Что касается ряда, составленного из абсолютных величин членов ряда (3), то при данных условиях он может оказаться как сходящимся, так и расходящимся. Поэтому теорема Лейбница служит достаточным признаком условной сходимости ряда и не решает вопроса об абсолютной сходимости данного ряда.

Так, например, геометрический ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots$$

удовлетворяет условиям теоремы Лейбница и сходится, очевидно, абсолютно, а ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots,$$

называемый рядом Лейбница, также удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, но сходится только условно, так как ряд, составленный из абсолютных величин его членов, есть гармонический — расходящийся ряд.

Заметим, наконец, что если мы сумму ряда (3) заменим его частичной суммой, то допустим ошибку, абсолютная величина которой будет меньше абсолютной величины первого из отбрасываемых при этом членов ряда.

В самом деле, для ряда (3) мы имеем:

$$\begin{aligned} |S - S_n| &= |u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \dots| = \\ &= |u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - \dots| < u_{n+1}. \end{aligned}$$

Способ исследования рядов на абсолютную сходимость и, в частности, исследования на сходимость рядов с положительными членами дает нам следующий

Принцип сравнения рядов. Пусть имеем два ряда с положительными членами:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (u)$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots, \quad (v)$$

где $u_n \leq v_n$ при любом n . Тогда из сходимости ряда (v) вытекает сходимость ряда (u), а из расходимости ряда (u) следует расходимость ряда (v).

В самом деле, пусть ряд (v) сходится. Тогда он удовлетворяет условию Коши. Но

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p} \leq v_{n+1} + v_{n+2} + \dots + v_{n+p},$$

поэтому ряд (u) также удовлетворяет условию Коши и, следовательно, сходится.

Пусть ряд (u) расходящийся. В этом случае расходится и ряд (v), так как в противном случае, если бы ряд (v) сходил, то по доказанному сходил бы и ряд (u), что противоречит условию.

Заметим, что здесь мы могли бы довольствоваться условием $u_n \leq v_n$ для всех n , начиная с некоторого номера n_0 , так как в вопросе о сходимости или расходимости ряда конечное число членов ряда не играет никакой роли и поэтому для $n < n_0$ выполнение условия $u_n \leq v_n$ не является обязательным.

Рассмотрим еще два признака сходимости ряда, основанные на сравнении ряда с геометрической прогрессией.

Признак Даламбера. Предварительно докажем следующее утверждение.

Пусть для ряда

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

выполнено условие

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < q < 1 \quad (5)$$

при всех n , начиная с некоторого номера n_0 . Тогда ряд (1) сходится абсолютно.

В самом деле, в силу условия (5) имеем:

$$\left| \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \right| < q, \quad \left| \frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}} \right| < q, \quad \dots, \quad \left| \frac{u_{n_0+m}}{u_{n_0+m-1}} \right| < q, \quad \dots$$

Отсюда получим:

$$|u_{n_0+1}| < |u_{n_0}| q, \quad |u_{n_0+2}| < |u_{n_0}| q^2, \quad \dots, \quad |u_{n_0+m}| < |u_{n_0}| q^m, \quad \dots \quad (6)$$

Так как ряд

$$|u_{n_0}|q + |u_{n_0}|q^2 + \dots + |u_{n_0}|q^m + \dots,$$

представляющий геометрическую прогрессию со знаменателем q , где $0 < q < 1$, сходится, то в силу принципа сравнения рядов и неравенств (6) сходится и ряд

$$|u_{n_0+1}| + |u_{n_0+2}| + \dots + |u_{n_0+m}| + \dots \quad (7)$$

Отсюда в свою очередь вытекает сходимость ряда

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots, \quad (2)$$

для которого ряд (7) является остаточным членом. Но сходимость ряда (2) и означает абсолютную сходимость данного ряда (1).

Заметим, что если для ряда (1) существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = k < 1,$$

то условие (5) для него выполнено и поэтому ряд (1) сходится абсолютно.

Действительно, если возьмем некоторое число q , удовлетворяющее условию $k < q < 1$, то при достаточно большом n_0 для всех $n \geq n_0$ будет верно неравенство

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < q,$$

так как $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow k < q$, когда $n \rightarrow \infty$.

Если же для ряда (1) окажется, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = k > 1,$$

то при достаточно большом n_0 для всех $n \geq n_0$ будет верно неравенство

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1$$

и, значит,

$$|u_{n+1}| > |u_n|,$$

откуда видно, что u_n не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, т. е. ряд (1) не удовлетворяет необходимому условию сходимости и поэтому расходится.

Если для ряда (1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1,$$

то ряд (1) может оказаться как сходящимся, так и расходящимся. Так, например, для гармонического ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, очевидно, $k=1$; мы знаем, что гармонический ряд

расходящийся. А ряд Лейбница $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ сходится (условно), хотя для него тоже $k=1$.

Таким образом, мы имеем следующий признак сходимости ряда.

Признак Даламбера. Если для ряда

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = k,$$

то при $k < 1$ ряд сходится абсолютно, при $k > 1$ ряд расходится, а при $k = 1$ никакого вывода о сходимости ряда из этого сделать нельзя.

Признак Коши. Докажем следующее утверждение.

Пусть для ряда

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

выполнено условие

$$\sqrt[n]{|u_n|} < q < 1 \quad (8)$$

для всех n , начиная с некоторого номера n_0 . Тогда ряд (1) сходится абсолютно.

В самом деле, в силу условия (8) имеем:

$$|u_n| < q^n, \quad n = n_0, \quad n_0 + 1, \dots, n_0 + m, \dots \quad (9)$$

Так как ряд

$$q^{n_0} + q^{n_0+1} + \dots + q^{n_0+m} + \dots,$$

составленный из правых частей неравенств (9), очевидно, сходится, то по принципу сравнения рядов сходится и ряд

$$|u_{n_0}| + |u_{n_0+1}| + \dots + |u_{n_0+m}| + \dots, \quad (10)$$

составленный из левых частей неравенств (9). Отсюда в свою очередь вытекает сходимость ряда

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (2)$$

А это означает, что ряд (1) сходится абсолютно.

Заметим, что если для ряда (1) существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = k,$$

то при $k < 1$ будет выполнено условие (8).

В самом деле, взяв число q , удовлетворяющее условию $k < q < 1$, мы будем иметь $\sqrt[n]{|u_n|} < q$ для всех достаточно больших n , так как $\sqrt[n]{|u_n|} \rightarrow k < q$, когда $n \rightarrow \infty$.

Отсюда следует, что при $k < 1$ ряд (1) сходится абсолютно.

Если $k > 1$, то найдется такое n_0 , что для всех $n \geq n_0$ будет верно неравенство

$$\sqrt[n]{|u_n|} > 1, \quad (11)$$

так как $\sqrt[n]{|u_n|} \rightarrow k > 1$ при $n \rightarrow \infty$. Возведя обе части неравенства (11) в n -ю степень, получим:

$$|u_n| > 1$$

для всех $n \geq n_0$. Это означает, что для ряда (1) не выполнено необходимое условие сходимости.

Отсюда следует, что при $k > 1$ ряд (1) расходится.

При $k = 1$ ряд (1) может оказаться как сходящимся, так и расходящимся.

В этом можно убедиться хотя бы опять на примерах ряда Лейбница и гармонического ряда. Действительно, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

поэтому как для гармонического ряда, так и для ряда Лейбница имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Таким образом, мы имеем следующий признак сходимости ряда.

Признак Коши. Если для ряда

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = k,$$

то при $k < 1$ ряд сходится абсолютно, при $k > 1$ ряд расходится, а при $k = 1$ никакого вывода о сходимости ряда из этого сделать нельзя.

Пример 1. Выяснить, сходится ли ряд

$$\frac{1}{5} + \frac{2^5}{5^2} + \dots + \frac{n^5}{5^n} + \dots$$

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^5}{5^{n+1}}}{\frac{n^5}{5^n}} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^5 = \frac{1}{5} < 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится (для ряда с положительными членами сходимость и абсолютная сходимость означают одно и то же).

Пример 2. Исследовать ряд

$$\frac{1}{3} - \left(\frac{2}{5} \right)^2 + \left(\frac{3}{7} \right)^3 - \dots + (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n + \dots$$

Решение. По признаку Коши имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится абсолютно.

§ 4. Интегральный признак сходимости ряда

Здесь мы рассмотрим признак сходимости ряда, основанный на сравнении ряда с несобственным интегралом. Этот интегральный признак сходимости выражается следующей теоремой.

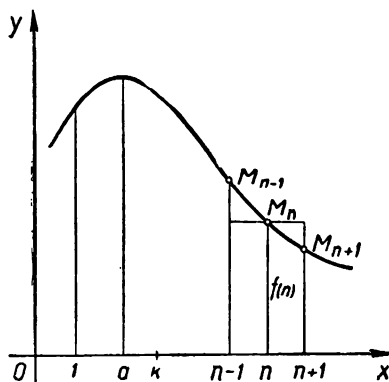
Теорема. Пусть функция $f(x)$ определена в области $x \geq 1$ и при $x \geq a \geq 1$ непрерывна, положительна и убывающая. Тогда для сходимости ряда

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) + \dots \quad (1)$$

необходимо и достаточно, чтобы существовал (сходился) несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Доказательство. Обозначим через k первое натуральное число, не меньшее a .



Черт. 1

Изобразим график данной функции $f(x)$ (черт. 1) и на оси Ox отметим точки $k, k+1, \dots, n-1, n, n+1, \dots$. Замечаем, что

$$\int_{n-1}^n f(x) dx > f(n) > \int_n^{n+1} f(x) dx. \quad (2)$$

В самом деле, $\int_{n-1}^n f(x) dx$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной снизу отрезком $[n-1, n]$, а сверху — дугой $M_{n-1} M_n$ графика функции $f(x)$, тогда как $f(n)$ равняется площади прямоугольника с основанием $[n-1, n]$ и высотой $f(n)$. Так как этот прямоугольник содержится в криволинейной трапеции, то

$$\int_{n-1}^n f(x) dx > f(n).$$

Но в то же время $f(n)$ равняется площади прямоугольника с основанием $[n, n+1]$ и высотой $f(n)$; этот прямоугольник содержит криволинейную трапецию, ограниченную снизу отрезком $[n, n+1]$, а сверху — дугой M_n, M_{n+1} графика функции $f(x)$, откуда следует, что

$$f(n) > \int_n^{n+1} f(x) dx.$$

Неравенства (2), очевидно, верны для всех $n \geq k+1$. Взяв эти неравенства для $n = k+1, k+2, \dots, m$:

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} f(x) dx &> f(k+1) > \int_{k+1}^{k+2} f(x) dx, \\ \int_{k+1}^{k+2} f(x) dx &> f(k+2) > \int_{k+2}^{k+3} f(x) dx, \\ &\dots \dots \dots \\ \int_{m-1}^m f(x) dx &> f(m) > \int_m^{m+1} f(x) dx \end{aligned}$$

и сложив их почленно, получим:

$$\begin{aligned} \int_k^m f(x) dx &> f(k+1) + f(k+2) + \dots + f(m) > \\ &> \int_{k+1}^{m+1} f(x) dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть существует несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Тогда существует и несобственный интеграл

$$\int_k^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_k^b f(x) dx,$$

так как $\int_a^b f(x) dx$ и $\int_k^b f(x) dx$ отличаются только на постоянную величину

$$\int_a^k f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_k^b f(x) dx.$$

По условию $f(x) > 0$ для всех $x \geq k \geq a$. Поэтому

$$\int_k^m f(x) dx < \int_k^{+\infty} f(x) dx \quad (4)$$

для любого m .

Из неравенств (3) и (4) вытекает, что

$$f(k+1) + f(k+2) + \dots + f(m) < \int_k^{+\infty} f(x) dx.$$

Это означает, что частичная сумма ряда

$$f(k+1) + f(k+2) + \dots + f(m) + \dots, \quad (5)$$

возрастающая с ростом номера суммы, ограничена сверху и, следовательно, имеет предел, т. е. ряд (5) сходится. Но тогда сходится и ряд (1).

Итак, если существует несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, то ряд (1) сходится. Следовательно, суще-

ствование несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ является достаточным признаком сходимости данного ряда (1).

Допустим теперь, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится. Для положительной функции

$f(x)$ это означает, что $\int_a^b f(x) dx \rightarrow +\infty$, когда $b \rightarrow +\infty$.

Но тогда и $\int_{k+1}^b f(x) dx \rightarrow +\infty$ при $b \rightarrow +\infty$, так как

$\int_a^b f(x) dx$ отличается от $\int_{k+1}^{k+1} f(x) dx$ только на постоянную величину, равную $\int_a^{k+1} f(x) dx$.

Отсюда следует, что интеграл $\int_{k+1}^{m+1} f(x) dx$, а в силу неравенства (3) и сумма $f(k+1) + f(k+2) + \dots + f(m)$ неограниченно возрастает при возрастании m . Поэтому ряд (5) расходится. Но тогда расходится и данный ряд (1).

Итак, если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится, то ряд (1) расходится. Следовательно, существование (сходимость) несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ является не только достаточным, но и необходимым признаком сходимости ряда (1).

Применим интегральный признак сходимости к исследованию ряда

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots \quad (6)$$

При $\alpha \leq 0$ ряд (6), очевидно, расходится, поэтому надо его исследовать только при $\alpha > 0$.

Взяв функцию $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, ряд (6) мы можем записать в виде

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) + \dots \quad (6')$$

Так как в области $x \geq 1$ функция $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ непрерывна, положительна и убывающая, то по интегральному признаку ряд (6') сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

Но при $\alpha \neq 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{при } \alpha > 1, \\ \infty & \text{при } \alpha < 1. \end{cases}$$

В случае $\alpha = 1$ имеем:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b) = \infty.$$

Мы видим, что несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится только при $\alpha > 1$.

Следовательно, ряд (6') или, что то же самое, данный ряд (6) сходится, если $\alpha > 1$, и расходится, если $\alpha \leq 1$.

Интегральный признак сходимости еще раз подтверждает расходимость гармонического ряда, который получается из ряда (6) при $\alpha = 1$.

§ 5. Перестановка членов ряда

Теорема 1. Если ряд

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

сходится абсолютно, то будут сходящимися и ряд

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k + \dots \quad (p)$$

положительных членов p_k , и ряд

$$q_1 + q_2 + \dots + q_k + \dots \quad (q)$$

абсолютных величин отрицательных членов — q_k данного ряда, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} p_k - \sum_{k=1}^{\infty} q_k.$$

Доказательство. По условию ряд (1) абсолютно сходящийся; поэтому ряд, образованный из абсолютных величин его членов, также сходится.

Пусть

$$\sigma = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (2)$$

Рассмотрим ряд (p).

Частичная сумма P_n ряда (p) при возрастании n , очевидно, возрастает. Кроме того, всегда можно выбрать t

настолько большим, чтобы среди первых m членов ряда (2) содержались первые n членов ряда (р); поэтому

$$P_n = \sum_{k=1}^n p_k \leq \sum_{k=1}^m |u_k| < \sigma.$$

Следовательно, сумма P_n , возрастающая и ограниченная сверху, имеет конечный предел. Это означает, что ряд (р) сходится. Обозначим его сумму через P .

Таким же образом доказывается сходимость ряда (q). Его сумму обозначим через Q .

Замечая, что

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^{n_1} p_k - \sum_{k=1}^{n_2} q_k = P_{n_1} - Q_{n_2} \quad (n_1 + n_2 = n),$$

и учитывая, что при $n \rightarrow \infty$ суммы P_{n_1} и Q_{n_2} стремятся к конечным пределам P и Q , имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n_1 \rightarrow \infty} P_{n_1} - \lim_{n_2 \rightarrow \infty} Q_{n_2},$$

т. е.

$$S = P - Q.$$

Теорема доказана.

Попутно заметим, что если ряд (1) сходится условно, то его ряды (р) и (q) расходящиеся.

Действительно, если бы для ряда (1) ряды (р) и (q) были сходящимися, то ряд (1) был бы абсолютно сходящимся, так как

$$\sum_{k=1}^n |u_k| = P_{n_1} + Q_{n_2} \quad (n_1 + n_2 = n),$$

причем P_{n_1} и Q_{n_2} в этом случае при $n \rightarrow \infty$ стремились бы к конечным пределам P и Q и поэтому существовал бы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |u_k| = P + Q.$$

Если же для ряда (1) один из рядов (р) или (q) был бы сходящимся, а другой расходящимся, то ряд (1) был бы расходящимся, так как в этом случае при $n \rightarrow \infty$ имели бы

$$\sum_{k=1}^n u_k = P_{n_1} - Q_{n_2} \rightarrow \infty.$$

Теорема 2. Если в абсолютно сходящемся ряде произвести какую угодно перестановку членов, то получится ряд, тоже абсолютно сходящийся, и его сумма будет равна сумме исходного ряда.

Доказательство. Сначала мы рассмотрим сходящийся ряд с положительными членами, представляющий частный случай абсолютно сходящихся рядов, а затем распространим доказательство теоремы на любой абсолютно сходящийся ряд, который может иметь как положительные, так и отрицательные члены.

Пусть ряд

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

сходится и все $u_n > 0$.

Произвольной перестановкой членов в данном ряде образуем новый ряд

$$u'_1 + u'_2 + \dots + u'_n + \dots, \quad (1')$$

и докажем, что он также сходится и имеет ту же сумму S , что и исходный ряд (1).

Возьмем m -ю частичную сумму ряда (1)

$$S_m = \sum_{k=1}^m u_k$$

и выберем n таким, чтобы среди первых n членов ряда (1') содержались все первые m членов ряда (1). Это мы можем сделать, так как ряды (1) и (1') отличаются только порядком членов. Тогда для рядов с положительными членами будет верно неравенство

$$S_m \leq S'_n = \sum_{k=1}^n u'_k.$$

Отправляясь от ряда (1') и рассуждая таким же образом, мы найдем такое m' , что будет верно неравенство

$$S'_n \leq S_{m'} = \sum_{k=1}^{m'} u_k.$$

Таким образом, при любом m мы имеем:

$$S_m \leq S'_n \leq S_{m'} \quad (m \leq n \leq m').$$

Так как ряд (1) сходится к S , то при неограниченном возрастании m суммы S_m и S_m' стремятся к общему пределу S . Поэтому к тому же пределу S стремится и сумма S'_n , заключенная между S_m и S_m' .

Хотя здесь может оказаться, что при возрастании m номер n суммы S'_n принимает не все натуральные числа, а возрастает скачками, принимая $n_1 < n_2 < \dots < n_m < \dots$, это не имеет значения, так как последовательность $\{S'_n\}$ монотонна (возрастающая).

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = S,$$

т. е. ряд (1') сходится и его сумма равна S , сумме данного ряда (1).

Таким образом, для сходящихся рядов с положительными членами теорема доказана.

Пусть теперь ряд (1) есть произвольный абсолютно сходящийся ряд. В этом случае имеем сходящийся ряд с положительными членами:

$$\sigma = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (2)$$

Перестановкой членов в ряде (1) составим новый ряд (1'). Замечаем, что ряд

$$|u'_1| + |u'_2| + \dots + |u'_n| + \dots \quad (2')$$

сходится, так как представляет результат перестановки членов в сходящемся ряде (2) с положительными членами. Следовательно, ряд (1') сходится абсолютно. Обозначим его сумму через S' .

Докажем, что и в этом общем случае сумма S' ряда (1') совпадает с суммой S исходного ряда (1).

В самом деле, по теореме 1 имеем:

$$S' = \sum_{k=1}^{\infty} p'_k - \sum_{k=1}^{\infty} q'_k,$$

где p'_k и $-q'_k$ обозначают соответственно положительные и отрицательные члены ряда (1'). Но ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} p'_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} q'_k$$

получены перестановкой членов в рядах

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \quad \text{и} \quad Q = \sum_{k=1}^{\infty} q_k,$$

образованных соответственно из положительных членов p_k и абсолютных величин отрицательных членов — q_k ряда (1). Так как для сходящихся рядов с положительными членами теорема уже доказана, то

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} p'_k, \quad Q = \sum_{k=1}^{\infty} q'_k$$

и поэтому

$$S' = P - Q.$$

Но по теореме 1 имеем также

$$S = P - Q.$$

Следовательно,

$$S' = S.$$

Теорема доказана.

Теорема 3 (Римана). Перестановкой членов в условно сходящемся ряде можно получить ряд, имеющий заранее данную сумму, или даже расходящийся ряд.

Доказательство. Пусть ряд

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

условно сходящийся. Тогда будут расходящимися как ряд

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k + \dots \quad (p)$$

положительных членов p_k , так и ряд

$$q_1 + q_2 + \dots + q_k + \dots \quad (q)$$

абсолютных величин отрицательных членов — q_k данного ряда (1).

Возьмем какое угодно число A .

Из положительных членов ряда (1) составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k > A.$$

Это возможно, так как ряд (p) расходящийся и поэтому его частичная сумма $\sum_{k=1}^{n_1} p_k$ при $n_1 \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает. Составляя указанную сумму, мы остановимся на таком члене p_{n_1} , без которого сумма была бы не больше A .

Присоединяя к составленной сумме отрицательные члены ряда (1), образуем новую сумму:

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k - \sum_{k=1}^{m_1} q_k < A.$$

Это возможно в силу расходимости ряда (q) . Номер m_1 и здесь выбираем наименьшим, т. е. таким, что без последнего члена $-q_{m_1}$ сумма была бы еще не меньше A .

Затем к новой сумме прибавляем те положительные члены ряда (1), которые следуют за p_{n_1} , взяв их столько, сколько лишь необходимо, чтобы получить сумму, большую A :

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k - \sum_{k=1}^{m_1} q_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} p_k > A.$$

Такое n_2 найдется, так как вместе с рядом (p) будет расходящимся и ряд $\sum_{k=n_1+1}^{\infty} p_k$.

После этого сумму дополняем отрицательными членами ряда (1), следующими за $-q_{m_1}$, взяв их столько, сколько лишь необходимо, чтобы получить сумму, меньшую A :

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k - \sum_{k=1}^{m_1} q_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} p_k - \sum_{k=m_1+1}^{m_2} q_k < A.$$

Если продолжать этот процесс неограниченно, то получится ряд

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k - \sum_{k=1}^{m_1} q_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} p_k - \sum_{k=m_1+1}^{m_2} q_k + \dots, \quad (1')$$

представляющий результат только перестановок членов в данном ряде (1).

Докажем, что этот ряд сходится и имеет суммой число A .

Действительно, частичная сумма S'_n ряда (1') при $n \rightarrow \infty$ будет бесконечное множество раз принимать значения, бóльшие A , а также и меньшие A , так как при $n = n_1$, $n = n_1 + m_1$ и т. д. совпадает с суммами, рассмотренными выше. Кроме того, учитывая, что построенные выше суммы отклонялись от A в ту или другую сторону всегда за счет последнего члена, замечаем, что при $S'_n > A$ имеем:

$$0 < S'_n - A < p_{n_k},$$

где p_{n_k} — последний положительный член суммы S'_n , а при $S'_n < A$ имеем:

$$0 < A - S'_n < q_{m_k},$$

где q_{m_k} — абсолютная величина последнего отрицательного члена в сумме S'_n .

Поэтому

$$|S'_n - A| < |u_l|,$$

причем $l \rightarrow \infty$, когда $n \rightarrow \infty$. Но

$$\lim_{l \rightarrow \infty} u_l = 0$$

в силу сходимости ряда (1). Отсюда имеем:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n.$$

Следовательно, ряд (1') сходится и его сумма равна числу A .

Чтобы получить расходящийся ряд, достаточно чередовать положительные и отрицательные члены ряда (1), например, так:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n_1} p_k > 1, \quad \sum_{k=1}^{n_1} p_k - q_1, \\ & \sum_{k=1}^{n_1} p_k - q_1 + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} p_k > 2, \quad \sum_{k=1}^{n_1} p_k - q_1 + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} p_k - q_2, \\ & \dots \end{aligned}$$

Действительно, если продолжать этот процесс неограниченно, то получится ряд

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k - q_1 + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} p_k - q_2 + \dots,$$

представляющий результат только перестановки членов в данном условно сходящемся ряде (1), но этот ряд уже будет расходящимся, так как его n -я частичная сумма неограниченно возрастает, когда $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, условно сходящиеся ряды переместительным свойством не обладают и этим резко отличаются от абсолютно сходящихся рядов, близких по своим свойствам к конечным суммам.

ГЛАВА II

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

§ 1. Область сходимости и равномерная сходимость функционального ряда

Здесь мы будем рассматривать функциональные ряды, членами которых являются функции одной действительной переменной.

Множество всех значений x , для которых функциональный ряд

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (1)$$

сходится, называется областью сходимости ряда (1).

Если ряд (1) сходится в области E , то его сумма также будет функцией, определенной в области E . Обозначая ее через $S(x)$, в этом случае можно написать:

$$S(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

Кроме того, очевидно, в этом случае имеем:

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x), \quad (2)$$

где, подобно числовым рядам,

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

и называется n -й частичной суммой, а

$$R_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots$$

остаточным членом ряда (1).

Из равенства (2) видно, что при каждом значении x из области сходимости ряда имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

и, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что для всех $n > N$ в этой точке x будет верно неравенство

$$|R_n(x)| < \varepsilon.$$

Здесь следует обратить внимание на то, что N для одного и того же $\varepsilon > 0$ может быть разным в разных точках x из области сходимости ряда. Требование, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовал номер N , общий для всех $x \in E$, является более сильным, чем требование сходимости ряда на множестве E .

Если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , не зависящий от x , что для всех $n > N$ верно неравенство

$$|R_n(x)| < \varepsilon$$

для всех x из множества E , то данный функциональный ряд называется равномерно сходящимся на множестве E .

Приведем пример, подтверждающий, что ряд может быть сходящимся в некоторой области и не быть равномерно сходящимся в этой области.

Рассмотрим ряд

$$x + x(1-x) + \dots + x(1-x)^{n-1} + \dots$$

в полуинтервале $[0, 1)$.

При $x=0$ все члены данного ряда равны 0, поэтому ряд сходится и его сумма тоже равна 0. При $0 < x < 1$ имеем: $0 < 1-x < 1$, откуда следует, что данный ряд в интервале $(0, 1)$ сходится и его сумма как сумма убывающей геометрической прогрессии равна

$$\frac{x}{1-(1-x)} = 1.$$

Итак, данный ряд в полуинтервале $[0, 1)$ сходится и его сумма есть функция

$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Докажем, что рассматриваемый ряд в полуинтервале $[0, 1)$ сходится неравномерно.

В самом деле, для $x \in (0, 1)$ имеем:

$$R_n(x) = x(1-x)^n + x(1-x)^{n+1} + \dots = (1-x)^n,$$

откуда видно, что при любом, как угодно большом, но фиксированном n

$$\lim_{x \rightarrow 0} R_n(x) = 1.$$

Следовательно, если $0 < \varepsilon < 1$, то каким бы большим номер n мы ни выбрали, неравенство

$$|R_n(x)| < \varepsilon$$

не будет верным для всех $x \in [0, 1)$, так как при любом фиксированном n найдутся точки $x \in [0, 1)$, достаточно близкие к 0, для которых $R_n(x)$ будет настолько близким к 1, что окажется большим $\varepsilon < 1$.

Признак равномерной сходимости ряда выражается следующей теоремой.

Теорема Вейерштрасса. Если на множестве E члены функционального ряда по абсолютной величине не превосходят соответствующих членов сходящегося ряда положительных чисел, то данный функциональный ряд на множестве E сходится равномерно.

Доказательство. Пусть

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (3)$$

есть сходящийся ряд положительных чисел и для всех членов функционального ряда

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (1)$$

верно

$$|f_n(x)| \leq u_n \quad (4)$$

при любом $x \in E$.

Из сходимости ряда (3) и неравенств (4) на основании принципа сравнения рядов заключаем, что ряд

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)| + \dots$$

сходится при любом $x \in E$. Это означает, что функциональный ряд (1) на множестве E сходится абсолютно.

Докажем, что на множестве E ряд (1) сходится равномерно.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу сходимости ряда (3) найдется такое N , что для всех $n > N$ будет верно неравенство

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots < \varepsilon.$$

Но для всех $x \in E$

$$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \dots \leq u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

Поэтому

$$|R_n(x)| < \varepsilon$$

для всех $n > N$ при всех значениях x из множества E . А это и означает, что на множестве E ряд (1) сходится равномерно.

§ 2. Непрерывность суммы функционального ряда

В предыдущем параграфе мы рассмотрели ряд

$$x + x(1-x) + \dots + x(1-x)^{n-1} + \dots$$

Там мы установили, что в полуинтервале $[0,1)$ этот ряд сходится, но не является равномерно сходящимся.

В этом примере обратим внимание на то, что в полуинтервале $[0,1)$ члены ряда непрерывны, а сумма ряда

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x=0, \\ 1 & \text{при } 0 < x < 1 \end{cases}$$

разрывна.

Следовательно, для рядов из непрерывности членов еще не вытекает непрерывность суммы, как это имеет место для конечных сумм.

Следующая теорема показывает, что равномерная сходимость ряда при непрерывности его членов является достаточным условием непрерывности суммы ряда.

Теорема. Если на множестве E функциональный ряд

$$S(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (1)$$

сходится равномерно, а члены ряда непрерывны, то сумма ряда непрерывна на множестве E .

Доказательство. Пусть x_0 принадлежит множеству E . Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как по условию ряд (1) на множестве E сходится равномерно, то существует такой номер N , что для остаточного члена ряда (1) будет верно неравенство

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

для всех $x \in E$, как только будет $n > N$.

Возьмем $n_0 > N$ и сумму $S(x)$ представим в виде

$$S(x) = S_{n_0}(x) + R_{n_0}(x).$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} |S(x) - S(x_0)| &= |S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0) + R_{n_0}(x) - R_{n_0}(x_0)| \leq \\ &\leq |S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| + |R_{n_0}(x)| + |R_{n_0}(x_0)|. \end{aligned}$$

Так как $S_{n_0}(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in E$ как конечная сумма непрерывных функций, то существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in E$, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta,$$

верно неравенство

$$|S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Кроме того, в силу выбора $n_0 > N$ имеем:

$$|R_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ и } |R_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Следовательно,

$$|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon$$

для всех $x \in E$, удовлетворяющих неравенству

$$|x - x_0| < \delta,$$

что и доказывает непрерывность суммы $S(x)$ данного ряда в произвольной точке $x_0 \in E$.

Таким образом, в вопросе о непрерывности суммы равномерно сходящийся ряд не отличается от конечных сумм, чего нельзя сказать о каждом функциональном ряде, как это видно из рассмотренного выше примера.

§ 3. Интегрирование функциональных рядов

В интегральном исчислении доказывается, что сумма конечного числа интегрируемых функций (в частности, непрерывных функций) интегрируема и интеграл от суммы равен сумме интегралов от слагаемых. Это утверждение не распространяется на произвольные сходящиеся ряды.

Следующая теорема дает достаточные условия, когда интеграл от суммы ряда существует и может быть вычислен путем почленного интегрирования ряда, т. е. таким же путем, как и в случае конечных сумм.

Теорема. Если на отрезке $[a, b]$ функциональный ряд

$$S(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (1)$$

сходится равномерно и члены ряда непрерывны, то на этом отрезке сумма ряда интегрируема и интеграл от суммы может быть получен почленным интегрированием данного ряда:

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx + \dots \quad (2)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что интегралы $\int_a^b f_n(x) dx$ для всех n и $\int_a^b S(x) dx$ существуют, так как на отрезке $[a, b]$ функции $f_n(x)$ и $S(x)$ непрерывны: $f_n(x)$ — по условию, а $S(x)$ — как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций.

Поэтому остается только доказать, что при данных условиях верно равенство (2).

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как ряд (1) на отрезке $[a, b]$ сходится равномерно, то найдется такое N , что для любого $n > N$ будет верно неравенство

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (3)$$

при всех значениях x из отрезка $[a, b]$.

Представим сумму $S(x)$ ряда (1) в виде

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x), \quad (1')$$

где $n > N$.

Правая часть равенства (1') есть сумма двух непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций: $S_n(x)$ непрерывна как сумма конечного числа непрерывных функций, а функция $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ непрерывна как разность непрерывных функций. Поэтому

$$\begin{aligned}\int_a^b S(x) dx &= \int_a^b [S_n(x) + R_n(x)] dx = \\ &= \int_a^b S_n(x) dx + \int_a^b R_n(x) dx,\end{aligned}$$

так как конечную сумму непрерывных функций [здесь сумму двух функций — $S_n(x)$ и $R_n(x)$] можно интегрировать почленно.

Отсюда

$$\left| \int_a^b S(x) dx - \int_a^b S_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b R_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |R_n(x)| dx.$$

Но в силу неравенства (3) для всех $n > N$

$$\int_a^b |R_n(x)| dx < \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b dx = \varepsilon.$$

Поэтому

$$\left| \int_a^b S(x) dx - \int_a^b S_n(x) dx \right| < \varepsilon$$

для всех $n > N$.

Следовательно,

$$\int_a^b S(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n(x) dx. \quad (4)$$

Учитывая, что для конечной суммы

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

мы имеем:

$$\int_a^b S_n(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx,$$

равенство (4) мы можем представить в виде

$$\int_a^b S(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx \right].$$

А это означает, что интеграл $\int_a^b S(x) dx$ есть предел n -й частичной суммы ряда

$$\int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx + \dots \quad (5)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Следовательно, ряд (5) сходится и его сумма равна интегралу $\int_a^b S(x) dx$, т. е. верно равенство (2).

Этим теорема доказана полностью.

§ 4. Дифференцирование функциональных рядов

В дифференциальном исчислении доказывается, что сумма конечного числа дифференцируемых функций дифференцируема и производная (дифференциал) суммы равняется сумме производных (дифференциалов) слагаемых. Это утверждение не распространяется на произвольные сходящиеся ряды.

Здесь мы докажем теорему, которая дает условия, достаточные для дифференцируемости суммы ряда и для того, чтобы получить правильный результат при вычислении производной (дифференциала) суммы ряда путем почленного дифференцирования ряда.

Теорема. Если на отрезке $[a, b]$ члены сходящегося функционального ряда

$$S(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (1)$$

имеют непрерывные производные $f'_n(x)$ и ряд производных

$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ сходится равномерно, то на этом отрезке сумма данного ряда (1) дифференцируема и производная суммы

$S'(x)$ может быть получена почленным дифференцированием ряда:

$$S'(x) = f'_1(x) + f'_2(x) + \dots + f'_n(x) + \dots \quad (2)$$

Доказательство. Сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$, который по условию на отрезке $[a, b]$ равномерно сходится, обозначим через $\sigma(x)$:

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

На основании теоремы об интегрировании функциональных рядов имеем:

$$\int_a^x \sigma(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f'_n(x) dx, \quad (3)$$

где x — любая точка отрезка $[a, b]$. Но

$$\int_a^x f'_n(x) dx = f_n(x) - f_n(a).$$

Поэтому равенство (3) можно записать в виде

$$\int_a^x \sigma(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(x) - f_n(a)]. \quad (3')$$

Так как правую часть (3') можно рассматривать как результат вычитания сходящихся рядов

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ и } S(a) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a),$$

то имеем:

$$\int_a^x \sigma(x) dx = S(x) - S(a),$$

откуда

$$S(x) = S(a) + \int_a^x \sigma(x) dx. \quad (4)$$

Соотношение (4) выражает $S(x)$ в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых имеет производную по x :

$$\frac{d}{dx} S(a) = 0$$

как производная постоянной величины и

$$\frac{d}{dx} \int_a^x \sigma(x) dx = \sigma(x),$$

так как производная интеграла от непрерывной функции по верхнему пределу равна подынтегральной функции при верхнем пределе, а $\sigma(x)$ как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна.

Следовательно, $S(x)$ имеет производную в любой точке x отрезка $[a, b]$, причем

$$S'(x) = \frac{d}{dx} \left[S(a) + \int_a^x \sigma(x) dx \right] = \sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x),$$

т. е. верно равенство (2).

ГЛАВА III

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

§ 1. Интервал сходимости

Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots, \quad (1)$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — постоянные коэффициенты, называется **степенным рядом**.

Любой степенной ряд, очевидно, сходится при $x=0$.

Следующая теорема позволит выяснить, что представляет собой вся область сходимости степенного ряда.

Теорема Абеля. Если степенной ряд (1) сходится при $x=x_0$, то он абсолютно сходится при любом значении x , удовлетворяющем условию $|\bar{x}| < |x_0|$.

Если же при $x = x_0$ степенной ряд расходится, то он расходится и при любом значении x , удовлетворяющем условию $|x| > |x_0|$.

Доказательство. Пусть ряд (1) при $x = x_0$, т. е. ряд

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n + \dots, \quad (1')$$

сходится. Тогда в силу необходимого условия сходимости ряда имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0,$$

откуда следует ограниченность последовательности $\{a_n x_0^n\}$, составленной из членов ряда (1'):

$$|a_n x_0^n| \leq M \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Рассмотрим ряд

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \dots + |a_n x^n| + \dots \quad (2)$$

Так как

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

и при любом x , удовлетворяющем условию $|x| < |x_0|$, ряд

$$M + M \left| \frac{x}{x_0} \right| + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots$$

сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$, то по принципу сравнения рядов сходится при $|x| < |x_0|$ и ряд (2). Это означает, что данный степенной ряд (1) сходится абсолютно для всех значений x , удовлетворяющих условию $|x| < |x_0|$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь ряд (1) при $x = x_0$ расходится. Докажем, что он расходится при всех значениях x , удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_0|$.

Действительно, если бы при некотором значении $x = x_1$, удовлетворяющем неравенству $|x_1| > |x_0|$, ряд (1) был сходящимся, то по доказанному он был бы сходящимся и при $x = x_0$, что противоречит условию.

Теорема доказана.

Теперь выясним, какова область сходимости степенного ряда.

Пусть ряд (1) сходится в любой точке $x > 0$. Тогда согласно теореме Абеля он сходится абсолютно на всей числовой оси.

Пусть ряд (1) в некоторой точке $x_0 > 0$ расходится. Тогда по теореме Абеля он расходится и при всех значениях $x > x_0$. Следовательно, в этом случае множество E точек $x \geq 0$, в которых ряд (1) сходится, ограничено сверху и поэтому имеет верхнюю грань $r \geq 0$.

По определению верхней грани множества правее r нет точек множества E , но при любом $\varepsilon > 0$ найдется точка множества E , которая будет правее $r - \varepsilon$. В силу теоремы Абеля из этого вытекает, что ряд (1) расходится вне интервала $(-r, r)$ и сходится абсолютно внутри этого интервала. (Если $r = 0$, то интервал $(-r, r)$ представляет лишь одну точку 0, в которой ряд (1) сходится абсолютно.)

О сходимости ряда (1) в концах интервала $(-r, r)$ никакого общего вывода, относящегося ко всем степенным рядам, сделать нельзя.

Интервал $(-r, r)$ называется интервалом сходимости, а число r — радиусом сходимости степенного ряда (1).

Таким образом, приходим к следующему выводу:

Областью сходимости степенного ряда (1) является интервал с центром в точке 0. Внутри интервала ряд сходится абсолютно, а вне интервала расходится.

У некоторых степенных рядов интервал сходимости охватывает всю числовую ось (тогда говорят, что $r = +\infty$), у других — вырождается в одну точку 0 (когда $r = 0$).

Допустим, что для степенного ряда (1) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l.$$

Тогда при конечном $l \neq 0$ радиус сходимости ряда (1) равен

$$r = \frac{1}{l}.$$

Действительно, в этом случае по признаку Даламбера имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| l,$$

откуда видно, что ряд (1) сходится, причем абсолютно, при $|x|l < 1$ и расходится при $|x|l > 1$. Следовательно, интервал сходимости определяется неравенством

$$|x| < \frac{1}{l} = r.$$

Если $l=0$, то $r=+\infty$, так как в этом случае при любом x имеем $|x|l=0$ и поэтому интервал сходимости ряда (1) есть $(-\infty, +\infty)$.

Если $l=\infty$, то $r=0$, так как в этом случае при любом $x \neq 0$ ряд (1) расходится и поэтому область сходимости представляет одну точку $x=0$.

§ 2. Равномерная сходимость степенного ряда

Рассмотрим теорему, касающуюся вопроса о равномерной сходимости степенного ряда.

Теорема. *Степенной ряд*

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots \quad (1)$$

сходится равномерно на любом отрезке, содержащемся в его интервале сходимости $(-r, r)$.

Доказательство. Возьмем любое число ρ , удовлетворяющее условию $0 < \rho < r$, и рассмотрим ряд (1) на отрезке $[-\rho, \rho] \subset (-r, r)$.

Так как ρ содержится в интервале $(-r, r)$, то при $x=\rho$ ряд (1) сходится абсолютно, т. е. сходится ряд

$$|a_0| + |a_1\rho| + |a_2\rho^2| + \dots + |a_n\rho^n| + \dots$$

Но для всех $x \in [-\rho, \rho]$

$$|a_nx^n| \leq |a_n\rho^n|.$$

Поэтому в силу признака Вейерштрасса ряд (1) на отрезке $[-\rho, \rho]$ сходится равномерно.

Следствие 1. В каждой точке интервала сходимости степенного ряда (1) сумма ряда непрерывна.

Действительно, если $x_0 \in (-r, r)$, то всегда можно выбрать отрезок $[-\rho, \rho]$, содержащий x_0 и содержащийся в интервале $(-r, r)$. Так как, по доказанному, ряд (1) на отрезке $[-\rho, \rho]$ сходится равномерно, а члены степенного ряда непрерывны, то сумма ряда (1) непрерывна на всем отрезке $[-\rho, \rho]$, а следовательно, непрерывна и в точке x_0 .

Следствие 2. Сумма $S(x)$ степенного ряда (1) интегрируема на любом отрезке, содержащемся в интервале сходимости ряда, причем интеграл от суммы ряда можно получить почленным интегрированием ряда. В частности,

$$\int_0^x S(x) dx = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \dots \quad (2)$$

при любом $x \in (-r, r)$.

Это вытекает из доказанной здесь теоремы и теоремы об интегрировании функциональных рядов.

В следующем параграфе мы докажем, что интервал сходимости ряда (2) совпадает с интервалом сходимости $(-r, r)$ исходного ряда (1).

§ 3. Дифференцирование степенных рядов

Теорема. Сумма степенного ряда дифференцируема в каждой точке интервала сходимости ряда, причем производная суммы ряда может быть получена почленным дифференцированием ряда; интервал сходимости ряда, полученного почленным дифференцированием степенного ряда, совпадает с интервалом сходимости исходного ряда.

Доказательство. Пусть $(-r, r)$ есть интервал сходимости степенного ряда

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1)$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, полученный почленным дифференцированием ряда (1), на произвольном отрезке $[-\rho, \rho]$, содержащемся в интервале $(-r, r)$.

Возьмем число ξ , удовлетворяющее условию $\rho < \xi < r$. Тогда $\rho = \xi q$, где $0 < q < 1$, и в каждой точке x отрезка $[-\rho, \rho]$:

$$|n a_n x^{n-1}| \leq |n a_n \rho^{n-1}| = |n a_n \xi^{n-1} q^{n-1}| = n \frac{|a_n \xi^n|}{\xi} q^{n-1}.$$

Но $\xi \in (-r, r)$, поэтому ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \xi^n|$ сходится и его члены ограничены:

$$|a_n \xi^n| \leq M$$

для всех n . Следовательно, на отрезке $[-\rho, \rho]$

$$|na_n x^{n-1}| \leq n \frac{M}{\xi} q^{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Далее, заметим, что ряд

$$\frac{M}{\xi} (1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1} + \dots), \quad (3)$$

образованный из правых частей неравенств (2), сходится, так как по признаку Даламбера имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)q^n}{nq^{n-1}} = q \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = q < 1.$$

По признаку Вейерштрасса из сходимости ряда (3) и неравенств (2) вытекает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ на отрезке $[-\rho, \rho]$ сходится равномерно.

Следовательно, в силу теоремы о дифференцировании функциональных рядов мы имеем:

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + na_n x^{n-1} + \dots \quad (1')$$

для всех $x \in [-\rho, \rho]$.

Так как для любой точки $x \in (-r, r)$ можно найти такой отрезок $[-\rho, \rho]$, который содержал бы точку x и в то же время сам содержался в интервале $(-r, r)$, то равенство (1') имеет место в каждой точке x интервала $(-r, r)$.

Остается доказать, что интервал сходимости ряда (1') совпадает с интервалом сходимости исходного ряда (1), т. е. что он не шире интервала $(-r, r)$, в котором сходимость ряда (1') уже установлена.

Допустим, что ряд (1') сходится в интервале $(-r', r')$, где $r' > r$. Тогда на основании следствия 2 из теоремы предыдущего параграфа в этом интервале $(-r', r')$ будет сходиться ряд

$$a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

полученный почленным интегрированием ряда (1'), и, следовательно, ряд (1). Но это противоречит тому, что интервал сходимости ряда (1) есть $(-r, r)$.

Теорема доказана полностью.

Если мы за исходный степенной ряд возьмем ряд (1'), то на основании уже доказанного придем к выводу, что в интервале $(-r, r)$ существует производная $S''(x)$ и что она равна сумме ряда сходящегося в том же интервале $(-r, r)$ и полученного двукратным почленным дифференцированием ряда (1):

$$S''(x) = 2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \dots + n \cdot (n-1)a_nx^{n-2} + \dots \quad (1'')$$

Продолжая эти рассуждения, мы придем к такому же выводу относительно производной $S^{(n)}(x)$ любого порядка n . Поэтому доказана следующая более общая

Теорема. Сумма степенного ряда в интервале сходимости ряда дифференцируема любое число раз, причем любая производная суммы ряда может быть получена почленным дифференцированием ряда (выполненным соответствующее число раз); все ряды, получаемые почленным дифференцированием степенного ряда, имеют тот же интервал сходимости, что и исходный ряд.

Замечание. Возвращаясь к вопросу об интегрировании степенных рядов, мы теперь можем доказать, что ряд (1) и ряд

$$a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \dots, \quad (*)$$

полученный почленным интегрированием ряда (1) в пределах от 0 до x , имеют один и тот же интервал сходимости $(-r, r)$.

В самом деле, если $(-p, p)$ есть интервал сходимости ряда (*), то по доказанному здесь $(-p, p)$ будет также интервалом сходимости и для ряда (1), который получается почленным дифференцированием ряда (*). Но интервал сходимости ряда (1) есть $(-r, r)$. Следовательно, интервал $(-p, p)$ совпадает с интервалом $(-r, r)$.

Следствие. Если функция $f(x)$ разложима в степенной ряд, т. е. существует степенной ряд, сумма которого в интервале сходимости $(-r, r)$ равна $f(x)$, то такой ряд только один.

В самом деле, если в интервале $(-r, r)$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots, \quad (4)$$

то по доказанному в том же интервале $(-r, r)$ имеем:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots,$$

$$f''(x) = 2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1) \dots 1a_n + (n+1)n \dots 2a_{n+1}x + \dots,$$

откуда при $x=0$ получим:

$$f(0)=a_0, \quad f'(0)=a_1, \quad f''(0)=2! a_2, \quad \dots, \quad f^{(n)}(0)=n! a_n, \dots$$

Следовательно, коэффициенты ряда (4), представляющего функцию $f(x)$, определяются однозначно формулами:

$$a_0=f(0), \quad a_1=\frac{f'(0)}{1!}, \quad a_2=\frac{f''(0)}{2!}, \quad \dots, \quad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \dots,$$

и поэтому ряд (4) есть

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots \quad (4')$$

Ряд в правой части равенства (4') называется рядом Тейлора функции $f(x)$.

Таким образом, если функция $f(x)$ выражается степенным рядом, то только единственным способом — своим рядом Тейлора.

Обратим внимание на то, что здесь мы исходили из допущения, что функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд. Может случиться, что данная функция не разложима в степенной ряд, хотя для нее и можно образовать ряд Тейлора, который в таком случае не будет сходиться к данной функции.

§ 4. Ряд Тейлора

Пусть функция $f(x)$ определена и имеет производные любого порядка на некотором отрезке. Пусть точки a и x принадлежат этому отрезку. Выразим данную функцию $f(x)$ в точке x по формуле Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\dots+ \\ +\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+R_n(x).$$

Если окажется, что $R_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то получим:

$$f(x)=\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\dots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \right\},$$

а это означает, что $f(x)$ представляет сумму ряда, у которого n -я частичная сумма есть выражение, содержащееся в фигурных скобках, т. е.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (1)$$

Ряд в правой части равенств (1) называется рядом Тейлора.

При $a=0$ равенство (1) принимает вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (1')$$

и представляет разложение функции $f(x)$ в степенной ряд по степеням x , с которым мы уже встречались в конце предыдущего параграфа.

Следует обратить внимание на то, что ряд Тейлора можно образовать для всякой функции $f(x)$, у которой существуют производные любого порядка, но отсюда еще не следует, что он непременно будет сходящимся к данной функции $f(x)$; он может оказаться расходящимся или сходящимся, но не к функции $f(x)$.

Поучительный пример дает нам функция:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

которая определена и непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$; непрерывность при $x \neq 0$ очевидна, а при $x=0$ следует из того, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0 = \varphi(0).$$

Функция $\varphi(x)$ имеет производные любого порядка. В самом деле,

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{t^2}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t)'}{(e^{t^2})'} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{t^2} 2t} = 0. \end{aligned}$$

Если же $x \neq 0$, то

$$\varphi'(x) = \left(e^{-\frac{1}{x^2}} \right)' = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Теперь нетрудно заметить, что при любом n мы имеем:

$$\varphi^{(n)}(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(t)}{e^{t^2}},$$

где $P(t)$ — некоторый многочлен; поэтому при помощи правила Лопиталья найдем:

$$\varphi^{(n)}(0) = 0.$$

Итак, функция $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема, причем $\varphi^{(n)}(0) = 0$ для любого n .

Следовательно, для функции $\varphi(x)$ мы имеем ряд Тейлора:

$$\varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}x + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots,$$

который сходится к нулю при всех значениях x , так как все коэффициенты ряда равны нулю. Поэтому при $x \neq 0$ функция $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \neq 0$ не является суммой своего ряда Тейлора.

Надо помнить, что равенство (1) или (1') верно тогда и только тогда, когда остаточный член в соответствующей формуле Тейлора для $f(x)$ стремится к нулю при неограниченном возрастании его номера.

Следовательно, чтобы разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)$, имеющую производную любого порядка, надо сначала формально составить этот ряд, затем найти его интервал сходимости и, наконец, найти те точки сходимости ряда, в которых остаточный член формулы Тейлора для $f(x)$ стремится к нулю при неограниченном возрастании n . Именно в этих точках и будет функция $f(x)$ суммой своего ряда Тейлора.

Теорема. Если в некоторой окрестности нуля функция $f(x)$ имеет производные любого порядка и все они по абсолютной величине ограничены одним и тем же числом:

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad (n = 1, 2, \dots),$$

то в этой окрестности функция $f(x)$ разложима в ряд Тейлора.

Доказательство. По условию данная функция $f(x)$ в некоторой окрестности g точки 0 и, в частности, в са-

мой точке 0 имеет производные любого порядка. Поэтому для нее можно образовать ряд Тейлора:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (2)$$

Чтобы доказать, что формально образованный ряд (2) в области g сходится и имеет суммой данную функцию $f(x)$, надо доказать, что в этой области остаточный член $R_n(x)$ соответствующей формулы Тейлора для функции $f(x)$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Взяв $R_n(x)$ в форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x),$$

где $0 < \theta < 1$, и воспользовавшись тем, что при любом n по условию $|f^{(n)}(x)| \leq M$ для всех $x \in g$, мы получим:

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!} M \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3)$$

для всех $x \in g$.

Так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} M \frac{|x|^n}{n!},$$

образованный из правых частей неравенств (3), сходится на всей числовой оси, в чем можно убедиться при помощи признака Даламбера, то при любом x имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(M \frac{|x|^n}{n!} \right) = 0.$$

Поэтому в силу неравенств (3) имеем также

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

для всех $x \in g$.

Следовательно, в области g

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots, \quad (2')$$

что и требовалось доказать.

Доказанная здесь теорема служит достаточным признаком разложимости функции в степенной ряд. Если же данная функция не удовлетворяет условиям этой теоремы,

то задача разложения ее в степенной ряд потребует исследования остаточного члена формулы Тейлора для данной функции.

Рассмотрим несколько примеров.

1) Тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$. Функции $\sin x$ и $\cos x$ в интервале $-\infty < x < +\infty$ имеют производные любого порядка, причем $|(\sin x)^{(n)}| \leq 1$ и $|(\cos x)^{(n)}| \leq 1$ для всех n . Следовательно, в силу предыдущей теоремы в интервале $(-\infty, +\infty)$ $\sin x$ и $\cos x$ разложимы в ряд Тейлора.

Пусть

$$f(x) = \sin x.$$

Тогда

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \\ f^{(4)}(x) = \sin x.$$

Так как $f^{(4)}(x)$ совпадает с $f(x)$, то $f^{(5)}(x) = f'(x)$ и т. д. Но

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1.$$

Поэтому в ряде Тейлора (2') для функции $f(x) = \sin x$ числителями коэффициентов ряда будут числа 0, 1, 0, -1, которые будут повторяться в том же порядке.

Следовательно,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots \quad (4)$$

для любого значения x .

Таким же образом для любого значения x получим:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots \quad (5)$$

Рядами (4) и (5) можно воспользоваться для вычисления значений функций $\sin x$ и $\cos x$. Эти ряды при всех значениях x знакопеременные. Поэтому если при вычислении приближенных значений $\sin x$ или $\cos x$ мы возьмем столько членов ряда (4) или (5), что остальные будут расположены в убывающем порядке по абсолютной величине, то абсолютная погрешность не будет превышать абсолютной величины первого из отброшенных членов.

Ряды (4) и (5) особенно быстро сходятся и поэтому наиболее удобны при $|x| < 1$. При больших значениях $|x|$

эти ряды сходятся медленно и для вычислений неудобны. Поэтому вычисления значений $\sin x$ и $\cos x$ в случае $|x| \geq 1$ надо по формулам тригонометрии предварительно свести к вычислениям $\sin x$ и $\cos x$ для $|x| < 1$.

Пример. Вычислить $\sin 5^\circ$ с точностью до 10^{-6} .

Решение. Прежде всего угол в 5° мы выразим в радианах, так как в рядах (4) и (5) x означает отвлеченное число.

В радианной мере 5° равняется

$$\frac{2\pi}{360} \cdot 5 = \frac{\pi}{36}.$$

По формуле (4) имеем:

$$\sin \frac{\pi}{36} = \frac{\pi}{36} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{36}\right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{36}\right)^5 - \dots$$

Оценим третий член правой части:

$$\frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{36}\right)^5 < \frac{1}{5!} (0,1)^5 = \frac{1}{120} \cdot 10^{-5} = \frac{5}{6} \cdot 10^{-7}.$$

Следовательно, ошибка, которую мы сделаем, если оставим в правой части формулы $\sin \frac{\pi}{36}$ только два члена, по абсолютной величине будет меньше, чем $\frac{5}{6} \cdot 10^{-7}$.

Отсюда видно, что для вычисления $\sin 5^\circ$ с точностью до 10^{-6} мы можем воспользоваться приближенной формулой:

$$\sin \frac{\pi}{36} \approx \frac{\pi}{36} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{36}\right)^3,$$

вычислив каждое слагаемое в правой части с семью знаками после запятой (округляя при этом обычным образом).

В самом деле, в этом случае ошибка при вычислении каждого члена правой части по абсолютной величине не будет превосходить $0,5 \cdot 10^{-7}$, а при вычислении всей правой части она не превзойдет $2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-7}$; прибавив к этому $\frac{5}{6} \cdot 10^{-7}$, мы увидим, что вся ошибка при вычислении $\sin \frac{\pi}{36}$ по нашей приближенной формуле будет по абсолютной величине меньше, чем

$$2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-7} + \frac{5}{6} \cdot 10^{-7} < 2 \cdot 10^{-7},$$

и, значит, меньше, чем единица шестого знака.

Так как

$$\frac{\pi}{36} \approx 0,0872665,$$
$$\frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{36} \right)^3 \approx 0,0001107,$$

то имеем:

$$\sin \frac{\pi}{36} \approx 0,0871558,$$

причем первые пять знаков после запятой точные.

2) Показательная функция e^x . Функция $f(x) = e^x$ имеет производные любого порядка:

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad f^{(n)}(0) = 1.$$

Поэтому можно составить соответствующий ей ряд Тейлора:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Возьмем произвольный отрезок $[-h, h]$. На этом отрезке все производные от функции $f(x) = e^x$ по абсолютной величине ограничены одним и тем же числом:

$$|f^{(n)}(x)| = |e^x| \leq e^h = M.$$

Поэтому на отрезке $|x| \leq h$, где h — любое положительное число, функция $f(x) = e^x$ разложима в ряд Тейлора, т. е. верно равенство

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (6)$$

Заметим, наконец, что равенство (6) верно для любого значения x , так как для любого x можно найти такое $h > 0$, что будет верно $|x| \leq h$.

Положив в формуле (6) $x = 1$, мы получим:

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \quad (7)$$

Ряд (7) сходится быстро и поэтому является весьма удобным для вычисления числа e с любой степенью точности.

Заметив, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right] < \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n! n}, \end{aligned}$$

мы видим, что

$$2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < e < 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n! n}.$$

Таким образом, взяв

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!},$$

мы получим приближенное значение числа e с недостатком, причем ошибка будет меньше, чем $\frac{1}{n! n}$.

Возьмем, например,

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{9!}.$$

Тогда ошибка будет меньше, чем

$$\frac{1}{9! 9} < 3,1 \cdot 10^{-7}.$$

Первые два слагаемых в этой приближенной формуле вычисляются точно. Следовательно, вычислив остальные семь слагаемых с семью точными знаками после запятой, округляя в сторону меньшую, мы получим приближенное значение числа e с недостатком с пятью точными знаками, так как общая ошибка будет меньше, чем

$$7 \cdot 0,9 \cdot 10^{-7} + 3,1 \cdot 10^{-7} = 9,4 \cdot 10^{-7} < 10^{-6}.$$

Вычисляя таким образом, мы получим:

$$\frac{1}{3!} \approx 0,1666666,$$

$$\frac{1}{4!} \approx 0,0416666,$$

$$\frac{1}{5!} \approx 0,0083333,$$

$$\frac{1}{6!} \approx 0,0013888,$$

$$\frac{1}{7!} \approx 0,0001984,$$

$$\frac{1}{8!} \approx 0,0000248,$$

$$\frac{1}{9!} \approx 0,0000027,$$

и, наконец,

$$e \approx 2,7182812,$$

где за пять знаков после запятой можно ручаться. На самом деле здесь верным является и шестой знак; приближенное значение числа e с семью точными знаками есть 2,7182818.

Пользуясь полученными равенствами (4), (5), (6), выведем две формулы, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Пусть z — действительная переменная, а i — мнимая единица.

Функцию e^{iz} естественно определить при помощи ряда, который получится, если в разложении (6) функции e^x заменить x через iz , так как при этом получится сходящийся ряд, представляющий сумму двух сходящихся рядов, т. е.

$$e^{iz} = \left\{ 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \dots \right\} + \\ + i \left\{ z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{z^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots \right\}.$$

Отсюда, учитывая равенства (5) и (4), получим:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad (7)$$

а заменяя z в этом равенстве через $-z$, будем иметь:

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \quad (8)$$

Формулы (7) и (8), а также равносильные им формулы

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (9)$$

называются формулами Эйлера.

§ 5. Вычисление логарифмов

По формуле суммы убывающей геометрической прогрессии мы имеем:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \dots \quad (1)$$

для всех x из интервала $(-1, 1)$.

На основании теоремы об интегрировании степенных рядов отсюда получим:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dx}{1+x} &= \int_0^x dx - \int_0^x x dx + \int_0^x x^2 dx - \dots + \\ &+ (-1)^{n-1} \int_0^x x^{n-1} dx + \dots \end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad (2)$$

причем интервал сходимости ряда (2) совпадает с интервалом сходимости $(-1, 1)$ исходного ряда (1). (При $x = -1$ ряд (2), очевидно, расходится, а при $x = 1$ он представляет условно сходящийся ряд Лейбница; можно доказать, что равенство (2) верно и при $x = 1$ и, следовательно, сумма ряда Лейбница есть $\ln 2$.)

Заменяя затем в равенстве (2) x на $-x$, получим:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots, \quad (3)$$

причем равенство (3) опять верно для x , удовлетворяющих условию $|x| < 1$.

Известно, что разность двух сходящихся рядов есть тоже сходящийся ряд, причем его сумма есть разность

сумм двух данных рядов. Учитывая это, а также то, что

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln \frac{1+x}{1-x},$$

из (2) и (3) получим равенство:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right), \quad (4)$$

которое верно для всех x , удовлетворяющих условию $|x| < 1$.

Если p и q — натуральные числа, то

$$\left| \frac{p-q}{p+q} \right| < 1,$$

поэтому в равенстве (4) можно взять

$$x = \frac{p-q}{p+q}.$$

Так как в этом случае

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{p}{q},$$

то имеем:

$$\ln \frac{p}{q} = 2 \left\{ \frac{p-q}{p+q} + \frac{1}{3} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^5 + \dots \right\}. \quad (5)$$

Формулой (5) можно пользоваться для вычисления натуральных логарифмов. Так, например, взяв $p=2$ и $q=1$, получим:

$$\ln 2 = 2 \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)3^{2n-1}} + \dots \right\},$$

где правая часть равенства есть быстро сходящийся ряд, удобный для вычисления приближенных значений $\ln 2$. Если $\ln 2$ уже вычислен с нужной степенью точности, то при $p=3$ и $q=2$ получим:

$$\begin{aligned} \ln 3 = \ln 2 + 2 \left\{ \frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \dots + \right. \\ \left. + \frac{1}{(2n-1)5^{2n-1}} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Полагая $\ln n$ уже вычисленным, получим:

$$\ln(n+1) = \ln n + 2 \left\{ \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right\}.$$

Мы видим, что ряд в правой части этого равенства сходится тем быстрее, чем больше n ; поэтому с возрастанием n вычисления логарифмов становятся все более и более простыми.

Заметим, что приближенная формула

$$\ln(n+1) \approx \ln n + 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \dots + \frac{1}{(2m-1)(2n+1)^{2m-1}} \right]$$

дает ошибку

$$\begin{aligned} & 2 \left[\frac{1}{(2m+1)(2n+1)^{2m+1}} + \frac{1}{(2m+3)(2n+1)^{2m+3}} + \dots \right] < \\ & < \frac{2}{(2m+1)(2n+1)^{2m+1}} \left[1 + \frac{1}{(2n+1)^2} + \dots \right] = \\ & = \frac{2}{(2m+1)(2n+1)^{2m+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}} = \\ & = \frac{2}{(2m+1)(2n+1)^{2m-1}[(2n+1)^2 - 1]} = \\ & = \frac{2}{(2m+1)(2n+1)^{2m-1}2n(2n+2)} < \frac{1}{(2m+1)n(2n+1)^{2m}}. \end{aligned}$$

Так, например, если при $n=10$ возьмем $m=2$, т. е. положим

$$\ln 11 \approx \ln 10 + 2 \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{3 \cdot 21^3} \right),$$

то ошибка будет меньше, чем

$$\frac{1}{5 \cdot 10 \cdot 21^4} < \frac{1}{5 \cdot 10 \cdot 20^4} = \frac{1}{2^3 \cdot 10^8} < 2 \cdot 10^{-7}.$$

Вычислив таким путем натуральные логарифмы, легко перейти к логарифмам с каким-либо другим основанием a . Действительно, пусть

$$y = \lg_a x.$$

Это означает, что

$$a^y = x.$$

Если теперь возьмем от обеих частей этого равенства натуральные логарифмы, то получим:

$$y \ln a = \ln x,$$

откуда

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Следовательно,

$$\lg_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x,$$

т. е. умножая натуральные логарифмы чисел на один и тот же множитель

$$M = \frac{1}{\ln a},$$

называемый модулем перехода, мы получим соответствующие логарифмы с основанием a .

§ 6. Разложение бинома

Поставим себе задачей разложить по степеням x бином $f(x) = (1+x)^m$. Если m — целое положительное число, то разложение $f(x)$ представляет конечную сумму и получается по формуле бинома Ньютона. Но здесь мы под m понимаем любое действительное число, поэтому для решения задачи придется данный бином разложить в ряд Тейлора.

Вычислим производные от функции $f(x) = (1+x)^m$:
 $f'(x) = m(1+x)^{m-1}$, $f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$, ...,
 $f^{(n)}(x) = m(m-1) \dots [m-(n-1)](1+x)^{m-n}$.

При $x=0$ получим:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = m, \quad f''(0) = m(m-1), \dots, \\ f^{(n)}(0) = m(m-1) \dots [m-(n-1)].$$

Отсюда видно, что биному $(1+x)^m$ соответствует ряд Тейлора:

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \dots [m-(n-1)]}{n!} x^n + \dots$$

Найдем интервал сходимости этого ряда. Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{m(m-1) \dots [m-(n-1)](m-n)}{(n+1)!}}{\frac{m(m-1) \dots [m-(n-1)]}{n!}} \right| = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m-n}{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m}{n+1} - \frac{n}{n+1} \right| = 1,$$

то радиус сходимости $r=1$.

Следовательно, ряд сходится при $|x| < 1$ и расходится, когда $|x| > 1$. При $|x| = 1$ исследование сходимости ряда не проводим.

Докажем теперь, что при $-1 < x < 1$ остаточный член $R_n(x)$ формулы Тейлора для бинома $(1+x)^m$ стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает.

С этой целью составим $R_n(x)$ в форме Коши:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{x^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\theta x) = \\ &= \frac{x^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} m(m-1) \dots [m-(n-1)] (1+\theta x)^{m-n}, \end{aligned}$$

откуда получим:

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \\ &= \left| \frac{m(m-1) \dots [m-(n-1)]}{(n-1)!} x^n \right| \left| \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right|^{n-1} |1+\theta x|^{m-n}. \quad (1) \end{aligned}$$

При $n \rightarrow \infty$ в выражении $|R_n(x)|$ последний множитель остается между $(1-|x|)^{m-1}$ и $(1+|x|)^{m-1}$, а второй — меньше единицы, так как

$$\left| \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right| < 1,$$

что при $0 \leq x < 1$ очевидно, а при $-1 < x < 0$ видно из того, что в этом случае

$$1+\theta x = 1-\theta|x|,$$

где $|x| < 1$ и $0 < \theta < 1$. Легко заметить, что первый множитель в выражении $|R_n(x)|$ стремится к нулю. Для этого достаточно убедиться при помощи признака Даламбера, что ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{m(m-1) \dots [m-(n-1)]}{(n-1)!} x^n \right|$$

в интервале $-1 < x < 1$ сходится, и, значит, его общий член, представляющий первый множитель в выражении $|R_n(x)|$, стремится к нулю, когда $n \rightarrow \infty$.

Следовательно, при $|x| < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0;$$

поэтому

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots[m-(n-1)]}{n!}x^n + \dots \quad (2)$$

для всех значений x из интервала $(-1, 1)$.

Если m — целое положительное число, то $f^{(m)}(x) = m!$, а $f^{(m+1)}(x) = 0$, поэтому ряд Тейлора для бинома $(1+x)^m$ в этом случае оборвется на члене, содержащем x^m , так как остальные члены будут равны нулю, и мы получим известную формулу бинома Ньютона:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + x^m.$$

Взяв в разложении бинома (2) $m = -1$, мы получим формулы:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1,$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad -1 < x < 1,$$

которые согласуются с формулой суммы убывающей геометрической прогрессии.

Полагая в (2) $m = \frac{1}{2}$, а затем $m = -\frac{1}{2}$, мы получим формулы:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \dots,$$

которые верны при всех значениях x из интервала $(-1, 1)$.

Разложением бинома (2) можно пользоваться при извлечении корней. Поясним это примерами.

Пример 1. Вычислить $\sqrt[9]{522}$ с точностью до 10^{-5} .

Решение. Прежде всего заметим, что

$$\sqrt[9]{522} = \sqrt[9]{512 + 10} = \sqrt[9]{512 \left(1 + \frac{10}{512}\right)} = 2 \left(1 + \frac{5}{256}\right)^{\frac{1}{9}}.$$

Далее, пользуясь разложением бинома (2), получим:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{5}{256}\right)^{\frac{1}{9}} &= 1 + \frac{1}{9} \frac{5}{256} - \frac{1}{2!} \frac{1 \cdot 8}{9^2} \left(\frac{5}{256}\right)^2 + \\ &+ \frac{1}{3!} \frac{1 \cdot 8 \cdot 17}{9^3} \left(\frac{5}{256}\right)^3 - \dots \end{aligned}$$

Рассмотрим четвертый член правой части:

$$\frac{1}{3!} \frac{1 \cdot 8 \cdot 17}{9^3} \left(\frac{5}{256} \right)^3 < \frac{1}{27} \left(\frac{5}{256} \right)^3 < \frac{5}{256^3} < \\ < \frac{5}{250^3} = \frac{1}{5 \cdot 25^2 \cdot 10^3} < \frac{1}{3} \cdot 10^{-6}.$$

Начиная со второго члена, ряд, выражающий $\left(1 + \frac{5}{256}\right)^{\frac{1}{9}}$, знакопередающийся и его члены по абсолютной величине идут убывая. Мы видим, что $\sqrt[9]{522}$ можно вычислить с точностью до 10^{-5} по приближенной формуле:

$$\sqrt[9]{522} \approx 2 \left(1 + \frac{1}{9} \frac{5}{256} - \frac{1}{2!} \frac{1 \cdot 8}{9^2} \frac{5^2}{256^2} \right),$$

вычислив второй и третий члены в скобках с шестью знаками, так как в этом случае вся ошибка по абсолютной величине будет меньше, чем

$$2 \left(2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} + \frac{1}{3} \cdot 10^{-6} \right) < 3 \cdot 10^{-6}.$$

Вычисляя так, мы получим:

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{5}{256} \approx 0,002169, \\ \frac{1}{2!} \cdot \frac{1 \cdot 8}{9^2} \cdot \frac{5^2}{256^2} \approx 0,000191$$

и, наконец,

$$\sqrt[9]{522} \approx 2,003956,$$

где четыре знака после запятой точные и ошибка по абсолютной величине не превышает единицы пятого разряда.

Пример 2. Вычислить $\sqrt[5]{240}$ с точностью до 10^{-5} .
Решение. Имеем:

$$\sqrt[5]{240} = \sqrt[5]{243 \left(1 - \frac{3}{243} \right)} = 3 \left(1 - \frac{1}{81} \right)^{\frac{1}{5}}.$$

По формуле (2):

$$\left(1 - \frac{1}{81} \right)^{\frac{1}{5}} = 1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{81} - \frac{1}{2!} \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{81^2} - \dots$$

Если мы здесь ограничимся только написанными тремя членами, то ошибка будет равна остаточному члену R_3 .

Согласно формуле (1):

$$|R_3| = \frac{1}{21} \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{81^3} \left(\frac{1-\theta}{1-\frac{\theta}{81}} \right)^2 \left(1 - \frac{\theta}{81} \right)^{-\frac{4}{5}}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-\theta}{1-\frac{\theta}{81}} \right)^2 &< 1, \\ 0 &< \left(1 - \frac{\theta}{81} \right)^{-\frac{4}{5}} < \left(1 - \frac{1}{81} \right)^{-\frac{4}{5}} = \left(\frac{81}{80} \right)^{\frac{4}{5}} = \\ &= \left(\sqrt[5]{\frac{81}{80}} \right)^4 < \left(\frac{81}{80} \right)^4, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} |R_3| &< \frac{2 \cdot 9}{5^3} \cdot \frac{1}{81^3} \cdot \left(\frac{81}{80} \right)^4 = \frac{2 \cdot 9 \cdot 81}{5^3 \cdot 80^4} = \frac{2 \cdot 9^3}{5^3 \cdot 8^4 \cdot 10^4} < \\ &< \frac{1}{5^3 \cdot 4 \cdot 8^3 \cdot 10} < \frac{1}{25 \cdot 10^5} = 4 \cdot 10^{-7}. \end{aligned}$$

Следовательно, приближенная формула

$$\sqrt[5]{240} \approx 3 \left(1 - \frac{1}{5 \cdot 81} - \frac{2}{5^3 \cdot 81^2} \right)$$

обеспечит точность до 10^{-8} , если второй и третий члены в скобках вычислить с шестью знаками, так как в этом случае абсолютная величина всей ошибки будет меньше, чем

$$3(2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} + 4 \cdot 10^{-7}) = 4,2 \cdot 10^{-6}.$$

Вычисляя так, мы получим:

$$\frac{1}{5 \cdot 81} \approx 0,002469,$$

$$\frac{2}{5^3 \cdot 81^2} \approx 0,000012$$

и, наконец,

$$\sqrt[5]{240} \approx 2,992557,$$

где четыре знака после запятой точные и ошибка по абсолютной величине меньше единицы пятого разряда.

§ 7. Разложение в ряд $\arcsin x$

Разложение функции $\arcsin x$ в степенной ряд можно получить из формулы разложения бинома.

В самом деле, мы имеем:

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (1)$$

Далее, взяв разложение функции $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ (§ 6) и заменив там x на $-x^2$, мы получим формулу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \dots + \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} x^{2n} + \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

которая верна при $x^2 < 1$, т. е. при $-1 < x < 1$.

Интегрируя ряд (2) почленно в пределах от 0 до $x \in (-1, 1)$, мы на основании теоремы об интегрировании степенных рядов и соотношения (1) получим формулу:

$$\begin{aligned} \arcsin x &= x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots + \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

которая опять будет верна для всех x из интервала $(-1, 1)$. [Можно доказать, что формула (3) верна и для $x = \pm 1$.]

При $x = \frac{1}{2}$ из формулы (3) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{5} \frac{1}{2^5} + \dots + \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{2^{2n+1}} + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Ряд (4) можно использовать для вычисления приближенного значения числа π с любой степенью точности.

Заметим, что если мы воспользуемся приближенной формулой

$$\begin{aligned} \pi \approx 6 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{5} \frac{1}{2^5} + \dots + \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{2^{2n+1}} \right], \end{aligned}$$

то ошибка будет:

$$\begin{aligned}
 & 6 \left[\frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \dots (2n+2)} \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2^{2n+3}} + \dots \right] = \\
 = & 6 \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \dots (2n+2)} \frac{1}{2^{2n+3}} \left[\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{(2n+5)2^2} + \dots \right] < \\
 < & 6 \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \dots (2n+2)} \frac{1}{2^{2n+3}} \frac{1}{2n+3} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots \right) = \\
 = & 6 \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \dots (2n+2)} \frac{1}{2^{2n+3}} \frac{1}{2n+3} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^2}} = \\
 & = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \dots (2n+2)(2n+3)2^{2n}}.
 \end{aligned}$$

В частности, приближенная формула

$$\pi \approx 6 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{5} \frac{1}{2^5} \right)$$

дает ошибку меньшую, чем

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{1}{7} \frac{1}{2^4} = \frac{5}{7 \cdot 2^8} < 3 \cdot 10^{-3};$$

поэтому, вычислив второе и третье слагаемые в скобках с тремя знаками, мы получим приближенное значение числа π с недостатком с точностью до 10^{-2} , так как вся ошибка в этом случае будет меньше, чем

$$6 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-3} = 9 \cdot 10^{-3}.$$

Вычисляя так, мы получим:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2^3} & \approx 0,021, \\
 \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^5} & \approx 0,002
 \end{aligned}$$

и, наконец,

$$\pi \approx 3,138.$$

(Более точно $\pi \approx 3,14159$.)

§ 8. Вычисление интегралов при помощи рядов

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[x_1, x_2]$, то, как известно, интеграл $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$ существует. Однако

вычисление этого интеграла при помощи формулы Ньютона—Лейбница не всегда возможно, так как не всегда можно найти первообразную для подинтегральной функции $f(x)$. В таких случаях часто удается при помощи степенных рядов найти приближенное значение интеграла с любой заданной точностью.

В самом деле, пусть функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (1)$$

и отрезок $[x_1, x_2]$ содержится в интервале, где равенство (1) имеет место. Тогда по теореме об интегрировании степенных рядов мы имеем:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = a_0 \int_{x_1}^{x_2} dx + a_1 \int_{x_1}^{x_2} x dx + \dots + a_n \int_{x_1}^{x_2} x^n dx + \dots,$$

или:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x_2^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x_1^{n+1}}{n+1}. \quad (2)$$

Формула (2) и дает нам возможность вычислить $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$ с любой степенью точности.

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2} dx,$$

где α и β — любые действительные числа. (Этот интеграл играет важную роль в теории вероятностей.)

Решение. Первообразная для функции e^{-x^2} , как и для всякой непрерывной функции, существует, но мы ее не можем выразить при помощи конечной комбинации элементарных функций, так как неопределенный интеграл

$$\int e^{-x^2} dx$$

„не берется“. Поэтому воспользоваться формулой Ньютона—Лейбница здесь мы не можем.

Чтобы вычислить данный интеграл, мы разложим подынтегральную функцию в степенной ряд. Для этого достаточно в известном разложении e^x по степеням x :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

которое верно при любом значении x , заменить x на $-x^2$:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots$$

Это равенство имеет место также при всех значениях x . Поэтому, какими бы ни были числа α и β , мы имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2} dx &= \int_{\alpha}^{\beta} dx - \frac{1}{1!} \int_{\alpha}^{\beta} x^2 dx + \frac{1}{2!} \int_{\alpha}^{\beta} x^4 dx + \dots \\ &\dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \int_{\alpha}^{\beta} x^{2n} dx + \dots \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2} dx &= \left[\frac{\beta}{1} - \frac{\beta^3}{1! 3} + \frac{\beta^5}{2! 5} - \dots + (-1)^n \frac{\beta^{2n+1}}{n! (2n+1)} + \dots \right] - \\ &- \left[\frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^3}{1! 3} + \frac{\alpha^5}{2! 5} - \dots + (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{n! (2n+1)} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Полученная формула позволяет вычислить данный интеграл с любой заданной степенью точности.

Раздел II

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ГЛАВА I

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Основные понятия

Понятие функции одной переменной не охватывает все зависимости, существующие в природе. Даже в самых простых задачах мы встречаем величины, значения которых определяются совокупностью значений нескольких величин.

Так, например, площадь S прямоугольника со сторонами x и y выражается формулой $S = xy$; поэтому значения S определяются совокупностью значений x и y .

Температура T в данной части пространства (например, комнаты) зависит от точки M , в которой измеряется температура, и от времени измерения t ; поэтому, если x , y и z — координаты точки M в некоторой системе координат, то значения T определяются совокупностью значений четырех величин — x , y , z и t .

Для изучения подобных зависимостей вводится понятие функции нескольких переменных.

Понятие n -мерного пространства. Устанавливая взаимно однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел, с одной стороны, и множеством точек прямой, с другой стороны, мы создаем так называемую числовую прямую, после чего каждое действительное число x мы рассматриваем как точку прямой.

Выбрав на плоскости прямоугольную систему координат xOy , мы рассматриваем каждую пару (x, y) действи-

тельных чисел x и y , взятых в определенном порядке, как точку плоскости.

Тройку (x, y, z) действительных чисел x , y и z мы отождествляем с точкой трехмерного пространства.

Таким образом, понятия: прямая — одномерное пространство, плоскость — двумерное пространство и трехмерное пространство — являются для нас понятиями арифметическими и означают то же самое, что и множество действительных чисел $\{x\}$, множество пар действительных чисел $\{(x, y)\}$ и множество троек действительных чисел $\{(x, y, z)\}$.

Продолжая идти дальше аналогичным путем, естественно назвать последовательность $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ любого количества n действительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ точкой n -мерного пространства, понимая под n -мерным пространством множество $\{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ таких последовательностей.

Геометрические термины находят свое естественное место и в n -мерном пространстве.

Так, расстояние $\rho(M, M')$ между точками $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $M'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ в n -мерном пространстве определяется формулой

$$\rho(M, M') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2},$$

которая при $n=1, 2, 3$ превращается в известные из аналитической геометрии формулы расстояния между двумя точками на прямой, на плоскости, в трехмерном пространстве.

Множество точек $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющих условию

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 = r^2,$$

представляет n -мерную сферу радиуса r с центром в точке $M_0(a_1, a_2, \dots, a_n)$. При $n=3$ это обычная сфера, а при $n=2$ — окружность.

Неравенства

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1, \quad a_2 \leq x_2 \leq b_2, \quad \dots, \quad a_n \leq x_n \leq b_n$$

выделяют в n -мерном пространстве параллелепипед вместе с его гранями. При $n=2$ он обращается в прямоугольник.

Понятие функции нескольких переменных. Если каждой точке $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ множества E

точек n -мерного пространства по некоторому закону поставлено в соответствие определенное действительное число z , то говорят, что на множестве E определена функция от точки M или функция от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ и пишут:

$$z = f(M) \quad \text{или} \quad z = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Множество E называется областью определения (или областью существования) функции.

При изучении функций нескольких переменных мы, как правило, будем ограничиваться рассмотрением функций двух переменных, так как обычно бывает совершенно ясно, как выводы, сделанные для функции двух переменных, переносятся на функции большего числа переменных.

Функция двух переменных $z = f(x, y)$ может быть задана либо на всей плоскости xOy , либо на некотором множестве E точек $M(x, y)$ плоскости xOy . Для характеристики таких множеств введем несколько понятий.

Круг радиуса $\epsilon > 0$ с центром в точке (x_0, y_0) без ограничивающей его окружности (т. е. множество точек (x, y) , удовлетворяющих условию $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \epsilon^2$), будем называть ϵ -окрестностью точки (x_0, y_0) .

Точка M называется внутренней точкой множества E , если существует такое $\epsilon > 0$, что M содержится в множестве E вместе со своей ϵ -окрестностью.

Если все точки множества E — внутренние для E , то множество E называется открытой областью.

Примером открытой области может служить вся плоскость. Открытой областью будет любой круг без ограничивающей его окружности. Можно доказать, что всякая непрерывная замкнутая кривая без кратных точек или, короче, простой замкнутый контур делит плоскость на две открытые области, из которых одна содержится внутри контура, другая — вне контура, а сам контур является границей этих областей.

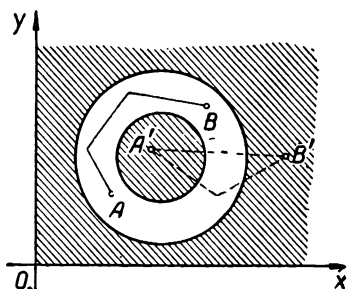
Если при любом $\epsilon > 0$ в ϵ -окрестности точки P найдется точка, принадлежащая открытой области g , и в то же время найдется точка, не принадлежащая g , то точка P называется граничной точкой для g . Множество всех граничных точек области образует границу этой области.

Если к открытой области присоединить ее границу, то мы получим замкнутую область.

Примером замкнутой области может служить круг вместе с ограничивающей его окружностью.

Область (открытая или замкнутая) называется связной, если любые две точки этой области можно соединить ломаной, всеми своими точками содержащейся в этой области.

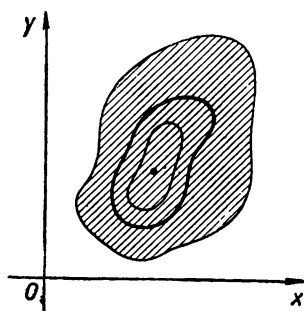
Так, например, область между двумя concentric окружностями (черт. 2) связна, а область, состоящая из меньшего круга и той части плоскости, которая находится вне большего круга, — не связна.



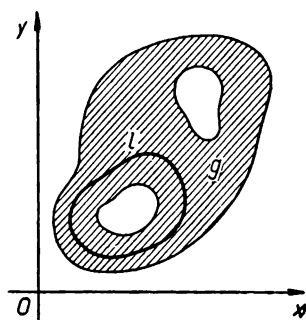
Черт. 2

Область называется односвязной, если любая замкнутая кривая в этой области может быть стянута в точку, не выходя из этой области и не разрывая кривую (черт. 3).

Если же в области g найдется такая замкнутая кривая l , которая непрерывным изменением не может быть



Черт. 3



Черт. 4

стянута в точку, не выходя из области g , то область g называется многосвязной (черт. 4).

Область называется ограниченной, если существует прямоугольник, содержащий эту область.

Всякую ограниченную открытую область, содержащую данную точку M , мы будем называть окрестностью точки M (в отличие от ϵ -окрестности просто окрестностью).

Эти понятия распространяются на случай задания функции любого числа n переменных в n -мерной области.

Так, если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена для всех значений $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющих условию

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq a^2,$$

то область определения данной функции замкнута и представляет n -мерный шар вместе с его поверхностью — n -мерной сферой радиуса a с центром в начале.

Если же функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена для $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющих неравенству

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < a^2,$$

то область определения данной функции открыта, так как она представляет n -мерный шар без ограничивающей его сферы.

Функция двух переменных может быть изображена геометрически.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в области g . Для каждой точки (x, y) из области g в прямоуголь-

ной системе координат xOy в пространстве существует точка $[x, y, f(x, y)]$. В простых случаях эти точки образуют некоторую поверхность, которая и будет геометрическим изображением данной функции $z = f(x, y)$.

Так, например, функция

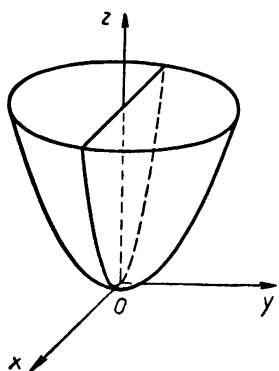
$$z = x^2 + y^2,$$

определенная на всей плоскости xOy , изображается параболоидом вращения (черт. 5).

Геометрическое изображение функции двух переменных в трехмерном пространстве страдает тем

недостатком, что пространственный чертеж нам приходится делать на плоскости. Поэтому иногда ход изменения функции двух переменных изображают на плоскости при помощи линий уровня.

На плоскости xOy мы находим точки, в которых функция $z = f(x, y)$ имеет постоянное значение $z = c$. В про-



Черт. 5

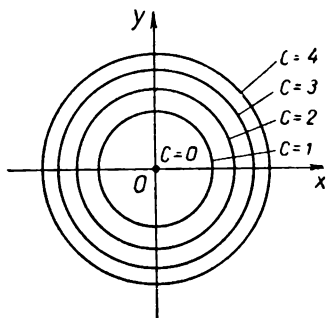
стых случаях эти точки образуют одну или несколько линий. Изобразив линии

$$f(x, y) = c$$

последовательно для $c = c_1, c = c_2, \dots$ с одним и тем же шагом $c_{k+1} - c_k$ для всех k , мы получим так называемые линии уровня данной функции.

Там, где линии уровня расположены густо, функция изменяется быстро (на поверхности, соответствующей функции, имеем крутой подъем или спуск), а где линии уровня расположены редко, функция изменяется медленно (поверхность пологая).

Функция $z = x^2 + y^2$, которая на чертеже 5 была изображена в виде параболоида, представлена на чертеже 6 при помощи линий уровня $x^2 + y^2 = c$.



Черт. 6

Ход изменения функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ можно представить при помощи поверхностей уровня

$$f(x, y, z) = c.$$

Понятие предела. Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой окрестности g точки (x_0, y_0) , кроме, быть может, самой точки (x_0, y_0) .

Если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек (x, y) из области g , отличных от точки (x_0, y_0) и удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta,$$

верно неравенство

$$|f(x, y) - C| < \epsilon,$$

то число C называют пределом функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) и пишут:

$$C = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y).$$

Непрерывность. Пусть функция $f(x, y)$ определена в области g и точка (x_0, y_0) принадлежит этой области.

Если

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

то функция $f(x, y)$ называется непрерывной в точке (x_0, y_0) .

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в каждой точке области g , то она называется непрерывной в области g .

Следует обратить внимание на то, что непрерывность функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) не сводится к непрерывности функций $f(x, y_0)$ в точке x_0 и $f(x_0, y)$ в точке y_0 . В этом можно убедиться на примере функции $f(x, y)$, определенной на всей плоскости xOy формулами:

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2},$$

если точка (x, y) не совпадает с началом $(0, 0)$, и

$$f(0, 0) = 0.$$

Так как

$$f(x, 0) = 0,$$

то

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0 = f(0, 0).$$

Поэтому функция $f(x, 0)$ непрерывна в точке $x_0 = 0$.

Функция $f(0, y)$ непрерывна в точке $y_0 = 0$, ибо

$$f(0, y) = 0$$

и

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0 = f(0, 0).$$

Однако данная функция $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$ не непрерывна. В самом деле, пусть $x = y \rightarrow 0$. Тогда

$$\lim_{x=y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x=y \rightarrow 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2 + x^2} = 1 \neq f(0, 0).$$

Таким образом, непрерывность функции нескольких переменных по совокупности аргументов не означает только непрерывности этой функции по каждому аргументу в отдельности.

Для функций нескольких переменных верны теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения и частного, а также теорема о непрерывности сложной функции, которые формулируются аналогично соответствующим теоремам для функций одной переменной.

Если функция нескольких переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области, то в этой области она обладает следующими свойствами: 1) ограничена; 2) имеет наибольшее и наименьшее значения; 3) при дополнительном условии — связности области принимает в качестве значений все числа, содержащиеся между ее наименьшим и наибольшим значениями; 4) равномерно непрерывна, т. е. для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой пары точек $M'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ и $M''(x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$ из данной области, удовлетворяющих условию

$$\rho(M', M'') < \delta,$$

верно неравенство

$$|f(M') - f(M'')| < \epsilon.$$

Доказательство этих свойств аналогично доказательству таких же свойств непрерывной функции одной переменной на отрезке.

§ 2. Частные производные

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области g .

Возьмем точку (x, y) из области g и дадим x приращение Δx , удовлетворяющее только одному условию: точка $(x + \Delta x, y)$ содержится в области g . Соответствующее приращение функции z равно:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Отношение $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ для данной точки (x, y) является функцией от Δx .

Если при $\Delta x \rightarrow 0$ существует конечный предел отношения $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$, то он называется частной производной от функции $z = f(x, y)$ по независимой переменной x в точке (x, y) и обозначается символом $\frac{\partial z}{\partial x}$ или $f'_x(x, y)$.

Таким образом, по определению

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

или, что то же самое,

$$f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Подобным же образом определяется частная производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ или $f'_y(x, y)$ от функции $z = f(x, y)$ по независимой переменной y в точке (x, y) :

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y).$$

Так же определяются частные производные от функции любого числа переменных.

Так, для функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

где

$$\Delta_{x_k} u = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Остановимся на геометрическом значении частных производных функции двух переменных.

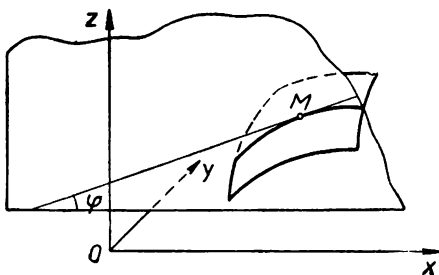
Пусть в трехмерном пространстве задана поверхность уравнением $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ — функция, имеющая в некоторой области g частные производные по x и по y . Выясним геометрический смысл этих производных в точке (x_0, y_0) из области g .

Чтобы найти $f'_x(x_0, y_0)$, надо взять производную от $f(x, y)$ по x , считая y постоянным, и затем в полученном результате y заменить через y_0 , а x — через x_0 . Ясно, что мы получим то же самое, если сначала в выражении функции $f(x, y)$ заменим y через y_0 , а затем возьмем производную от $f(x, y_0)$ по x в точке x_0 . Поэтому

$$f'_x(x_0, y_0) = \left[\frac{d}{dx} f(x, y_0) \right]_{x=x_0}.$$

Но $\left[\frac{d}{dx} f(x, y_0) \right]_{x=x_0}$, как производная от функции одной

переменной, есть угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой, представляющей график функции $f(x, y_0)$, в точке, где $x = x_0$. График же функции $f(x, y_0)$ есть, очевидно, линия пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостью $y = y_0$ (черт. 7).



Черт. 7

Следовательно, $f'_x(x_0, y_0)$ есть тангенс угла наклона к положительному направлению оси Ox касательной, проведенной к линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостью $y = y_0$ в точке $M(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$f'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \varphi.$$

Таким же образом убеждаемся в том, что $f'_y(x_0, y_0)$ есть тангенс угла наклона к положительному направлению оси Oy касательной, проведенной к линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостью $x = x_0$ в точке $M(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Из определения частных производных следует, что для получения $f'_{x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) надо взять производную по x_k от функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ как от функции одной переменной x_k , считая все другие аргументы неизменными. Поэтому частные производные функций нескольких переменных вычисляются при помощи тех же правил и формул, которыми мы пользуемся при вычислении обыкновенных производных функций одной переменной.

Пример. Найти частные производные от функции

$$u = x^{y^z}.$$

Решение. Чтобы найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, надо от данной функции

взять производную по x , считая y и z постоянными. Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^z x^{y^z-1}.$$

Приняв y за переменную, а x и z — за постоянные, найдем:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^z} (\ln x) z y^{z-1}.$$

Наконец, взяв z за переменную, а x и y — за постоянные, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^z} (\ln x) y^z \ln y.$$

§ 3. Полный дифференциал

Пусть в области g дана функция $z = f(x, y)$.

Возьмем точку (x, y) из области g . Выбранным значениям x и y дадим приращения Δx и Δy , удовлетворяющие только одному требованию: точка $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ также должна принадлежать области g .

Если соответствующее приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

данной функции можно представить в виде

$$\Delta z = A \Delta x + B \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y, \quad (1)$$

где A и B не зависят от Δx и Δy , а $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ стремятся к нулю при стремлении к нулю Δx и Δy , то функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке (x, y) , а линейная часть $A \Delta x + B \Delta y$ приращения функции (т. е. та часть Δz , которая зависит от Δx и Δy линейно) называется полным дифференциалом (или просто дифференциалом) этой функции в точке (x, y) и обозначается символом dz :

$$dz = A \Delta x + B \Delta y. \quad (2)$$

Из определения дифференцируемости функции следует, что если данная функция дифференцируема в некоторой точке, то она в этой точке непрерывна.

Действительно, если в точке (x, y) функция $z = f(x, y)$ дифференцируема, то для этой точки Δz представимо в

форме (1), откуда прямо следует, что

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0,$$

а это означает, что в точке (x, y) функция $z = f(x, y)$ непрерывна.

Из дифференцируемости функции в данной точке следует также существование частных производных этой функции в данной точке.

В самом деле, пусть функция $z = f(x, y)$ в точке (x, y) дифференцируема. Тогда для (x, y) приращение Δz данной функции можно представить в форме (1) при любых Δx и Δy . Взяв в соотношении (1) $\Delta x \neq 0$, а $\Delta y = 0$, мы получим:

$$\Delta_x z = A \Delta x + \alpha(\Delta x, 0) \Delta x \quad (1')$$

и, разделив обе части (1') на $\Delta x \neq 0$,

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x, 0). \quad (3)$$

Так как в правой части (3) A не зависит от Δx , а $\alpha(\Delta x, 0)$ стремится к нулю при $\Delta x \rightarrow 0$, то

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

Это означает, что в точке (x, y) существует частная производная от функции $z = f(x, y)$ по x и

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A.$$

Подобными же рассуждениями, взяв в равенстве (1) $\Delta x = 0$, а $\Delta y \neq 0$, убеждаемся в том, что в точке (x, y) существует частная производная от функции $z = f(x, y)$ по y и

$$\frac{\partial z}{\partial y} = B.$$

Наконец, подставив в соотношении (2) вместо A и B соответственно $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, получим формулу полного дифференциала для функции $z = f(x, y)$:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y. \quad (2')$$

Понятие дифференциала функции мы распространим и на независимые переменные, положив дифференциалы независимых переменных равными приращениям этих переменных:

$$dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y.$$

После этого формула полного дифференциала функции $z = f(x, y)$ примет вид:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (2'')$$

Для функции одной переменной не только из дифференцируемости вытекает существование производной, но и обратно, из существования производной в данной точке вытекает дифференцируемость функции в этой точке. В случае функций нескольких переменных дело обстоит иначе. Из существования в данной точке частных производных функции по всем аргументам еще не следует дифференцируемость этой функции в данной точке.

Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных дает следующая теорема.

Теорема. Если в некоторой окрестности точки M существуют частные производные от данной функции по всем аргументам и они непрерывны в точке M , то в этой точке данная функция дифференцируема.

Доказательство. Пусть функция $z = f(x, y)$ в некоторой окрестности D точки (x_0, y_0) имеет частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, непрерывные в точке (x_0, y_0) . Окрестность D можно считать прямоугольником $[x_0 - \delta, x_0 + \delta], [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$.

Рассмотрим приращение данной функции

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

соответствующее приращениям Δx и Δy , удовлетворяющим условию: точка $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ находится в D .

Представим Δz в виде

$$\Delta z = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]. \quad (4)$$

Если $f(x, y_0 + \Delta y)$ рассматривать как функцию одной переменной x при фиксированных y_0 и Δy , то первая разность в правой части (4) будет приращением этой функции, соответствующим изменению аргумента x от x_0 до

$x_0 + \Delta x$. Так как $f(x, y_0 + \Delta y)$ на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$ имеет производную, ибо при любом $x \in [x_0, x_0 + \Delta x]$ точка $(x, y_0 + \Delta y)$ принадлежит области D , где существует $f'_x(x, y)$, то по теореме Лагранжа имеем:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = \\ = f'_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y) \Delta x, \end{aligned}$$

где $0 < \theta < 1$.

Вторая разность в правой части (4) есть приращение функции $f(x_0, y)$ при изменении y от y_0 до $y_0 + \Delta y$. Поэтому

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0 + \theta' \Delta y) \Delta y,$$

где $0 < \theta' < 1$.

Следовательно,

$$\Delta z = f'_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y) \Delta x + f'_y(x_0, y_0 + \theta' \Delta y) \Delta y.$$

Положим,

$$\begin{aligned} \alpha(\Delta x, \Delta y) &= f'_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0, y_0), \\ \beta(\Delta x, \Delta y) &= f'_y(x_0, y_0 + \theta' \Delta y) - f'_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta z &= f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y + \\ &+ \alpha(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как в силу непрерывности производных $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в точке (x_0, y_0) имеем:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0),$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_y(x_0, y_0 + \theta' \Delta y) = f'_y(x_0, y_0),$$

а, значит,

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0,$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0,$$

то соотношение (5) означает, что функция $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) дифференцируема. Теорема доказана.

Все сказанное здесь о функции двух переменных распространяется естественным и очевидным образом на случай функции любого числа переменных. Так, например,

для дифференцируемой функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ полный дифференциал выражается формулой:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz,$$

аналогичной формуле (2'') для дифференциала функции двух переменных.

В заключение этого параграфа отметим, что если в точке (x, y) функция $z = f(x, y)$ дифференцируема и $dz \neq 0$, то полное приращение данной функции

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y$$

отличается от своей линейной части

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$$

только на сумму последних слагаемых $\alpha \Delta x$ и $\beta \Delta y$, являющихся при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$ бесконечно малыми более высокого порядка, чем слагаемые линейной части. Поэтому при $dz \neq 0$ линейную часть приращения дифференцируемой функции называют главной частью приращения функции и пользуются приближенной формулой:

$$\Delta z \approx dz,$$

которая будет тем более точной, чем будут меньше по абсолютной величине приращения аргументов.

Пример 1. Найти полный дифференциал функции

$$u = e^{xyz}.$$

Решение. Воспользуемся формулой:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{xyz} yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{xyz} xz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = e^{xyz} xy,$$

то

$$du = e^{xyz} (yzdx + xzdy + xydz).$$

Пример 2. Вычислить приближенно объем стенок закрытого ящика, имеющего форму параллелепипеда, если его размеры — 40, 50 и 60 сантиметров, а толщина стенок — 0,5 сантиметра.

Решение. Обозначим наружные размеры ящика через x , y , z . Тогда объем ящика, включая и объем его стенок, будет равен:

$$V = xyz.$$

Объем v стенок ящика равен абсолютной величине приращения ΔV , которое получит V , если значениям $x=40$, $y=50$, $z=60$ дать приращения $\Delta x = \Delta y = \Delta z = -1$. Но

$$\begin{aligned}\Delta V &\approx dV = \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \Delta z = \\ &= yz\Delta x + xz\Delta y + xy\Delta z = \\ &= 50 \cdot 60(-1) + 40 \cdot 60(-1) + 40 \cdot 50(-1) = -7400.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$v \approx 7400 \text{ куб. см.}$$

§ 4. Производные сложных функций

Рассмотрим сложную функцию z от одной переменной t , заданную формулами:

$$z = f(x, y), \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \quad (1)$$

Пусть в точке t существуют производные

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \text{ и } \frac{dy}{dt} = \psi'(t),$$

и при соответствующих значениях $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ функция $f(x, y)$ дифференцируема.

Докажем, что при данных условиях сложная функция $z = f[\varphi(t), \psi(t)]$ в точке t имеет производную $\frac{dz}{dt}$ и что эту производную можно выразить через производные $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ в точке t и частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в соответствующей точке (x, y) .

В самом деле, дадим t приращение Δt . Тогда x и y получают некоторые приращения Δx и Δy . Если Δx и Δy не равны нулю одновременно, то соответствующее прира-

шение Δz , которое в силу дифференцируемости функции $z = f(x, y)$ в точке (x, y) может быть представлено в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

где α и β — функции от Δx и Δy , стремящиеся к нулю при стремлении к нулю Δx и Δy . Чтобы эта формула выражала Δz и при $\Delta x = \Delta y = 0$, достаточно положить $\alpha(0, 0) = \beta(0, 0) = 0$.

Возьмем:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \frac{\Delta y}{\Delta t}. \quad (2)$$

Во всех слагаемых в правой части этого равенства каждый множитель имеет предел при $\Delta t \rightarrow 0$. Существование

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi'(t) \text{ и } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \psi'(t)$$

дано по условию. Из существования $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ и $\frac{dy}{dt} = \psi'(t)$ в точке t следует непрерывность в этой точке функций $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$; поэтому при стремлении к нулю Δt стремятся к нулю и Δx и Δy , а это в свою очередь влечет за собой стремление к нулю величин α и β . Что касается $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, то они при $\Delta t \rightarrow 0$ остаются постоянными для данной точки, так как не содержат никаких приращений.

Из этого вытекает, что при $\Delta t \rightarrow 0$ правая часть, а значит, и левая часть равенства (2) — отношение $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ — имеет предел, причем

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \\ &+ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \beta \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \end{aligned}$$

Но

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt}.$$

Следовательно, при данных условиях сложная функция z , заданная формулами (1), в точке t имеет производную $\frac{dz}{dt}$, которая выражается формулой:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (3)$$

В частном случае, когда

$$z = f(x, y), \quad y = \psi(x) \quad (1')$$

и, следовательно, z является сложной функцией от x : $z = f[x, \psi(x)]$, мы, очевидно, получим:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}. \quad (3')$$

В формуле (3') $\frac{\partial z}{\partial x}$ есть частная производная от $z = f(x, y)$ по x , при вычислении которой в выражении $f(x, y)$ аргумент y принимается за постоянное. А $\frac{dz}{dx}$ есть полная производная от z по независимой переменной x , при вычислении которой y в выражении $f(x, y)$ уже не принимается за постоянную, а считается в свою очередь функцией от x : $y = \psi(x)$, и поэтому зависимость z от x учитывается полностью.

В случае сложной функции, заданной формулами:

$$u = f(x, y, z); \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

при условии существования производных $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ в точке t и дифференцируемости $f(x, y, z)$ в соответствующей точке (x, y, z) мы получим:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Далее рассмотрим дифференцирование сложных функций многих переменных. Для простоты мы ограничимся, как обычно, функцией двух переменных.

Пусть функция $z = z(\xi, \eta)$ задана формулами:

$$z = f(x, y), \quad x = \varphi(\xi, \eta), \quad y = \psi(\xi, \eta). \quad (4)$$

Пусть в точке (ξ, η) существуют частные производные $\frac{\partial x}{\partial \xi}$, $\frac{\partial x}{\partial \eta}$, $\frac{\partial y}{\partial \xi}$, $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ и в соответствующей точке (x, y) функция $f(x, y)$ дифференцируема.

Докажем, что при данных условиях сложная функция $z = z(\xi, \eta)$ в точке (ξ, η) имеет производные $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial z}{\partial \eta}$ и что эти производные выражаются через производные от x и y по ξ и η и через производные от z по x и y .

Так как при дифференцировании z по ξ вторая независимая переменная η принимается за постоянную, вследст-

ние чего x и y при этой операции становятся функциями одной переменной ξ , то вопрос о $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ решается совершенно так же, как вопрос о $\frac{dz}{dt}$ при выводе формулы (3). Поэтому $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ в точке (ξ, η) существует и выражается формулой, которая получится из формулы (3), если там независимую переменную t заменить через ξ и вместо производных от z , x и y по t взять производные от z , x и y по ξ , которые, конечно, уже будут частными производными.

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}. \quad (5)$$

Таким же путем при данных условиях получим:

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}. \quad (6)$$

Если сложная функция $u = u(\xi, \eta)$ задана формулами:

$$u = f(x, y, z), \quad x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta), \quad z = z(\xi, \eta), \quad (7)$$

то при соответствующих условиях мы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (8)$$

В частном случае, когда

$$u = f(x, y, z), \quad \text{где } z = z(x, y), \quad (7')$$

очевидно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}, \quad (8')$$

где $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ — полные частные производные от u по независимым переменным x и y , т. е. результаты дифференцирования u по x и по y с учетом полной зависимости u от x и y , в том числе и через $z = z(x, y)$, а $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ — частные производные от $u = f(x, y, z)$ по x и по y , входящим в выражение $f(x, y, z)$ явно, так что при вычислении $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ аргумент z принимается за постоянное.

Пример 1. Найти частные производные сложной функции, заданной формулами:

$$z = \ln(x^2 - y^2), \quad x = \xi\eta, \quad y = \frac{\xi}{\eta}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \xi} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{2x}{x^2 - y^2} \eta + \frac{-2y}{x^2 - y^2} \frac{1}{\eta} = \\ &= \frac{2}{x^2 - y^2} \left(x\eta - \frac{y}{\eta} \right). \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{2x}{x^2 - y^2} \xi + \frac{-2y}{x^2 - y^2} \left(-\frac{\xi}{\eta^2} \right) = \\ &= \frac{2}{x^2 - y^2} \left(x\xi + \frac{y\xi}{\eta^2} \right). \end{aligned}$$

Пример 2. Найти частные производные сложной функции

$$u = (x - y)^z, \quad \text{где} \quad z = x^2 + y^3,$$

по независимым переменным x и y .

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (x - y)^z + \frac{\partial}{\partial z} (x - y)^z \frac{\partial z}{\partial x} = \\ &= z(x - y)^{z-1} + (x - y)^z \ln(x - y) 2x. \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (x - y)^z + \frac{\partial}{\partial z} (x - y)^z \frac{\partial z}{\partial y} = \\ &= -z(x - y)^{z-1} + (x - y)^z \ln(x - y) 3y^2. \end{aligned}$$

§ 5. Дифференциалы сложных функций

Пусть

$$z = f(x, y), \quad \text{где} \quad x = \varphi(\xi, \eta), \quad y = \psi(\xi, \eta). \quad (1)$$

Пусть в точке (ξ, η) функции $\varphi(\xi, \eta)$ и $\psi(\xi, \eta)$ имеют непрерывные частные производные по ξ и по η , а в соответствующей точке (x, y) существуют и непрерывны частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, вследствие чего функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в этой точке.

Из предыдущего параграфа известно, что при условиях, которые здесь выполнены, функция $z = f[\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)]$ в данной точке (ξ, η) имеет производные:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}. \quad (2)$$

Из формул (2) видно, что $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial z}{\partial \eta}$ в точке (ξ, η) непрерывны. Поэтому функция $z = f[\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)]$ в точке (ξ, η) дифференцируема, причем согласно формуле полного дифференциала для функции от независимых переменных имеем:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta. \quad (3)$$

Заменив в правой части равенства (3) $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial z}{\partial \eta}$ их значениями из соотношений (2), мы получим:

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) d\xi + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) d\eta$$

или, что то же самое,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \right). \quad (4)$$

Так как функции $x = \varphi(\xi, \eta)$ и $y = \psi(\xi, \eta)$ по условию в точке (ξ, η) имеют непрерывные частные производные, то они в этой точке дифференцируемы и

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta. \quad (5)$$

Из соотношений (4) и (5) следует, что

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (6)$$

Формула (6) показывает, что дифференциал функции $z = f(x, y)$ выражается формулой одной и той же формы как в том случае, когда аргументы функции — x и y являются независимыми переменными, так и в случае, когда эти аргументы в свою очередь являются функциями от некоторых переменных. Однако в содержании формулы есть существенное различие: если x и y — независимые переменные, то dx и dy являются не только дифференциалами, но и приращениями этих переменных, если же x и y — функции, то dx и dy — дифференциалы, но в общем случае не приращения этих функций.

Следовательно, полный дифференциал функции нескольких переменных имеет инвариантную форму:

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

безразлично, являются ли x и y независимыми переменными или же функциями одной или нескольких переменных.

Из инвариантности формы полного дифференциала следует, что правила, которые были установлены для вычисления дифференциалов функций одной переменной, остаются в силе и для вычисления дифференциалов функций нескольких переменных.

Рассмотрим, например, правило дифференцирования произведения.

Мы знаем, что для дифференцируемых функций $u(x)$ и $v(x)$

$$d(uv) = vdu + u dv.$$

Пусть $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $v = v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — дифференцируемые функции от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Рассмотрим

$$z = uv.$$

В силу инвариантности формы полного дифференциала, мы имеем:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

Но

$$\frac{\partial z}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = u.$$

Поэтому

$$dz = vdu + u dv.$$

Следовательно,

$$d(uv) = vdu + u dv$$

и в этом случае, когда u и v — функции многих переменных.

Совершенно так же можно подтвердить и другие правила и формулы дифференцирования.

Таким образом, чтобы найти полный дифференциал функции многих переменных, можно сначала вычислить частные производные данной функции и затем воспользоваться формулой полного дифференциала. Но можно найти полный дифференциал данной функции и не прибегая к формуле полного дифференциала, а ведя вычисления путем применения правил дифференцирования; в этом случае, вычислив полный дифференциал данной функции,

мы одновременно найдем и частные производные этой функции, так как они будут в выражении полного дифференциала функции коэффициентами при дифференциалах соответствующих аргументов: производная по x — коэффициентом при dx и т. д.

Пример. Найти полный дифференциал функции

$$z = 3x^2 + 4y^2 - 6xy + 9x - 10y + 1.$$

Решение. Вычисляем dz по правилам дифференцирования:

$$\begin{aligned} dz &= 3d(x^2) + 4d(y^2) - 6d(xy) + 9dx - 10dy = \\ &= 6x dx + 8y dy - 6(y dx + x dy) + 9dx - 10dy = \\ &= 3(2x - 2y + 3) dx + 2(4y - 3x - 5) dy. \end{aligned}$$

Из выражения дифференциала dz видим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3(2x - 2y + 3), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2(4y - 3x - 5).$$

§ 6. Касательная плоскость

Прежде всего получим уравнение касательной прямой к пространственной кривой, заданной в параметрической форме уравнениями:

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t), \quad (1)$$

где $f(t)$, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — функции, имеющие на отрезке $[\alpha, \beta]$ производные $f'(t)$, $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$.

Возьмем на данной кривой точку M , соответствующую некоторому значению t из отрезка $[\alpha, \beta]$, и точку M' , соответствующую $t + \Delta t \in [\alpha, \beta]$ (черт. 8).

Секущая MM' как прямая, проходящая через две точки $M(x, y, z)$ и $M'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, выражается уравнениями:

$$\frac{X - x}{\Delta x} = \frac{Y - y}{\Delta y} = \frac{Z - z}{\Delta z}, \quad (2)$$

где X , Y и Z — текущие координаты.

Уравнения (2) эквивалентны уравнениям:

$$\frac{X - x}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{Y - y}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{Z - z}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}. \quad (2')$$

Предельное положение секущей MM' при $M' \rightarrow M$, что будет при $\Delta t \rightarrow 0$, есть касательная MT к данной кривой в точке M . Уравнения этой касательной мы получим, перейдя в уравнениях (2') секущей MM' к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$.

Следовательно, касательная к кривой (1) в точке M выражается уравнениями:

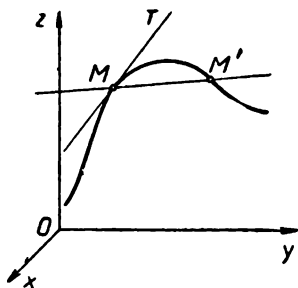
$$\frac{X-x}{f'(t)} = \frac{Y-y}{\varphi'(t)} = \frac{Z-z}{\psi'(t)}. \quad (3)$$

Перейдем теперь к вопросу о касательной плоскости к поверхности.

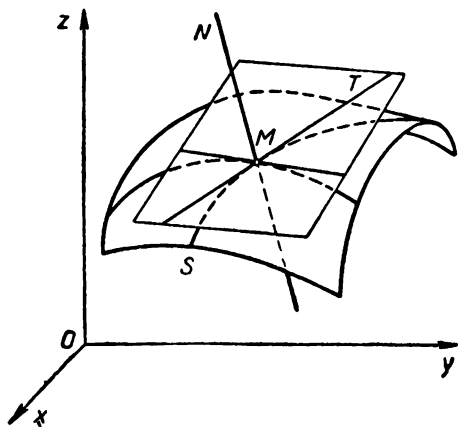
Пусть дана поверхность уравнением

$$F(x, y, z) = 0. \quad (4)$$

Возьмем на данной поверхности точку $M(x, y, z)$ и допустим, что в этой точке функция $F(x, y, z)$ дифференцируема.



Черт. 8



Черт. 9

На поверхности (4) возьмем произвольную кривую MS , проходящую через точку $M(x, y, z)$ (черт. 9).

Пусть в параметрической форме она выражается уравнениями:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (5)$$

При этом данную поверхность мы будем считать такой, что на ней кривую (5) можно провести через точку M в любом направлении так, что при значении t , соответствующем точке M , функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ будут иметь непрерывные производные $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$. Из этого следует, что кривая (5) в точке M имеет касательную MT , которая определяется уравнениями:

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}. \quad (6)$$

Так как кривая MS целиком лежит на данной поверхности, то координаты любой точки MS , которые определяются уравнениями (5), удовлетворяют уравнению (4). Поэтому мы имеем тождество:

$$F[x(t), y(t), z(t)] = 0,$$

откуда следует

$$\frac{dF}{dt} = 0.$$

Но по формуле производной сложной функции в точке M имеем:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Следовательно, в точке $M(x, y, z)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0. \quad (7)$$

Введем в рассмотрение прямую MN , определив ее уравнениями:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad (8)$$

где $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial F}{\partial z}$ взяты в точке $M(x, y, z)$.

Соотношение (7) показывает, что касательная MT перпендикулярна к прямой MN .

Из уравнений (8) видно, что прямая MN вполне определяется данной поверхностью (4) и выбранной на этой поверхности точкой $M(x, y, z)$, но не зависит от кривой

MS , которую мы провели на поверхности (4) через точку M произвольно.

Следовательно, касательные, проведенные в точке M ко всевозможным кривым, лежащим на поверхности (4) и проходящим через точку M , перпендикулярны к одной и той же прямой MN и поэтому лежат в одной плоскости, которую мы будем называть касательной плоскостью к данной поверхности в точке M .

Уравнение этой касательной плоскости как уравнение плоскости, проходящей через точку $M(x, y, z)$ и перпендикулярной к прямой (8), есть

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z-z) = 0. \quad (9)$$

Прямая MN , перпендикулярная к касательной плоскости данной поверхности и проходящая через точку касания M , называется нормалью данной поверхности (4) в точке M . Уравнения (8) есть уравнения нормали MN .

Пусть данная поверхность выражается уравнением

$$z = f(x, y), \quad (4')$$

разрешенным относительно z . Тогда, представив это уравнение в виде

$$f(x, y) - z = 0$$

и обозначив левую часть $f(x, y) - z$ через $F(x, y, z)$, будем иметь:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -1.$$

Подставив все это в уравнение (9), получим уравнение:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y-y) = Z-z, \quad (9')$$

которое определяет касательную плоскость к данной поверхности (4') в точке $M(x, y, z)$.

Теперь мы можем дать геометрическое истолкование полного дифференциала функции двух переменных.

Возьмем на касательной плоскости (9') точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Координаты этой точки удовлетворяют уравнению (9'). Поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_1 - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(y_1 - y) = z_1 - z. \quad (10)$$

Пусть $x_1 = x + dx$, $y_1 = y + dy$. Тогда из равенства (10) получим:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = z_1 - z.$$

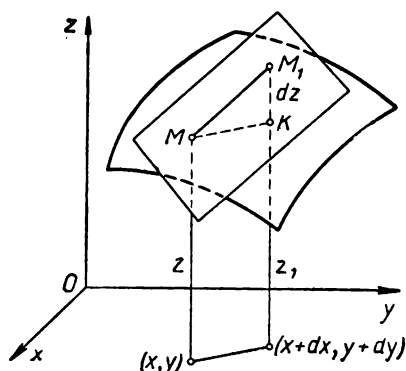
Но

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = df(x, y).$$

Поэтому

$$df(x, y) = z_1 - z.$$

Следовательно, полный дифференциал функции $f(x, y)$ в точке (x, y) , соответствующий приращениям dx и dy , есть приращение KM_1 , которое получит аппликата касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке M .



Черт. 10

тельной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$, если из точки касания M перейти в точку M_1 с абсциссой $x + dx$ и ординатой $y + dy$ (черт. 10).

Если мы вместо Δz берем dz , пользуясь приближенным равенством

$$\Delta z \approx dz,$$

то это означает, что участок поверхности $z = f(x, y)$, который проектируется на плоскость xOy в некоторую окрестность g точки (x, y) , мы заменяем участком касательной плоскости к этой поверхности в точке $M(x, y, f(x, y))$, проекция которого на плоскость xOy есть та же окрестность g точки (x, y) .

Пример. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к сфере

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

в любой ее точке $M(x, y, z)$.

Решение. Обозначив

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2,$$

найдем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z.$$

Следовательно, уравнение касательной плоскости к данной сфере в точке $M(x, y, z)$ есть

$$2x(X - x) + 2y(Y - y) + 2z(Z - z) = 0.$$

Разделив обе части на 2 и раскрыв скобки, преобразуем это уравнение к виду

$$xX + yY + zZ = x^2 + y^2 + z^2.$$

Так как точка M лежит на данной сфере и, значит, ее координаты x, y, z удовлетворяют уравнению сферы, то правая часть полученного уравнения равна r^2 .

Следовательно, искомое уравнение касательной плоскости есть

$$xX + yY + zZ = r^2.$$

Уравнения нормали к данной сфере в точке $M(x, y, z)$, очевидно, есть

$$\frac{X-x}{x} = \frac{Y-y}{y} = \frac{Z-z}{z},$$

откуда видно, что нормаль к сфере в любой ее точке M проходит через центр сферы (для данной сферы — через начало координат) и, значит, по радиусу сферы, направленному в точку M .

Следовательно, касательная плоскость к сфере перпендикулярна к радиусу сферы, проведенному в точку касания.

§. 7. Частные производные высших порядков

Пусть функция

$$z = f(x, y)$$

имеет частные производные в каждой точке некоторой области g . Тогда эти производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y) \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$$

будут функциями от x и y , определенными в области g , которые в свою очередь в точках области g (во всех или в некоторых) могут иметь частные производные.

Частные производные от $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ называются частными производными второго порядка от функции $z = f(x, y)$ и обозначаются следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y), & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y), & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).\end{aligned}$$

Подобным образом определяются частные производные третьего порядка, четвертого порядка и т. д. Так, например,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) &= \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = f'''_{xyx}(x, y), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} \right) &= \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y \partial x^2} = f^{(4)}_{xyxx}(x, y).\end{aligned}$$

Обращают на себя внимание смешанные производные, например, $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ или $f'''_{xyx}(x, y)$ и $f'''_{xxy}(x, y)$, которые различаются между собой только порядком выполнения операции взятия производной по x и по y . У нас нет оснований считать их совпадающими между собой. Однако дальше будет доказана теорема, устанавливающая такое совпадение для обширного класса функций.

Пример 1. Для функции

$$z = \sin(xy)$$

найти

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}.$$

Решение.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= y \cos(xy), & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} (y \cos(xy)) = -y^2 \sin(xy), \\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (-y^2 \sin(xy)) = -2y \sin(xy) - xy^2 \cos(xy), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (y \cos(xy)) = \cos(xy) - xy \sin(xy), \\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (\cos(xy) - xy \sin(xy)) = -y \sin(xy) - \\ &- y \sin(xy) - xy^2 \cos(xy) = -2y \sin(xy) - xy^2 \cos(xy).\end{aligned}$$

Мы видим, что для данной функции

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \equiv \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}.$$

Пример 2. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}$, если

$$z = f(x, y), \quad x = \xi - \eta, \quad y = 2\eta.$$

Решение. Пользуясь правилом дифференцирования сложных функций, найдем:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} = f'_x(x, y) \cdot 1 + f'_y(x, y) \cdot 0 = f'_x(x, y).$$

Так как $f'_x(x, y)$ опять сложная функция от ξ и η , то производную второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} f'_x(x, y)$$

опять вычисляем по правилу дифференцирования сложных функций:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} f'_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} f'_x(x, y) \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial y} f'_x(x, y) \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} = \\ &= f''_{xx}(x, y) \cdot (-1) + f''_{xy}(x, y) \cdot 2. \end{aligned}$$

Итак,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = 2f''_{xy}(x, y) - f''_{xx}(x, y).$$

Теорема. Если в некоторой окрестности g точки (x_0, y_0) существуют смешанные производные $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ и они непрерывны в точке (x_0, y_0) , то справедливо равенство $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

Доказательство. Возьмем произвольные $h \neq 0$ и $k \neq 0$ настолько малыми, чтобы все точки внутри и на границе прямоугольника с вершинами (x_0, y_0) , $(x_0 + h, y_0)$, $(x_0, y_0 + k)$ и $(x_0 + h, y_0 + k)$ принадлежали окрестности g точки (x_0, y_0) , и рассмотрим:

$$\begin{aligned} \Delta &= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - \\ &\quad - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (1)$$

Выразим Δ при помощи функции

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0), \quad (2)$$

где k , так же как и y_0 , имеет постоянное значение. Очевидно,

$$\Delta = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0). \quad (3)$$

Так как по условию в области g существует смешанная производная $f''_{xy}(x, y)$, то существует в g и производная $f'_x(x, y)$; из этого вытекает, что функция $\varphi(x)$, определенная формулой (2), на отрезке $[x_0, x_0 + h]$ имеет производную

$$\varphi'(x) = f'_x(x, y_0 + k) - f'_x(x, y_0),$$

и поэтому правую часть равенства (3) можно преобразовать по формуле Лагранжа.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta &= h\varphi'(x_0 + \theta h) = \\ &= h[f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \theta h, y_0)], \end{aligned} \quad (4)$$

где $0 < \theta < 1$.

В правой части (4) разность в квадратных скобках есть приращение функции $f'_x(x_0 + \theta h, y)$, соответствующее изменению аргумента y от y_0 до $y_0 + k$. Так как на отрезке $[y_0, y_0 + k]$ функция $f'_x(x_0 + \theta h, y)$ имеет производную по y , ибо в области g существует $f''_{xy}(x, y)$, то по формуле Лагранжа имеем:

$$\begin{aligned} f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \theta h, y_0) &= \\ &= kf''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta'k), \end{aligned}$$

где $0 < \theta' < 1$. Учитывая это соотношение, равенство (4) может быть приведено к виду:

$$\Delta = hkf''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta'k). \quad (5)$$

Далее, воспользовавшись функцией

$$\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y),$$

получим:

$$\begin{aligned} \Delta &= \psi(y_0 + k) - \psi(y_0) = k\psi'(y_0 + \theta_1 k) = \\ &= k[f'_y(x_0 + h, y_0 + \theta_1 k) - f'_y(x_0, y_0 + \theta_1 k)] = \\ &= khf''_{yx}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_1 k), \end{aligned}$$

где $0 < \theta'_1 < 1$, $0 < \theta_1 < 1$.

Итак, Δ выражается одновременно равенством (5) и равенством

$$\Delta = khf''_{yx}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_1 k). \quad (6)$$

Поэтому

$$hkf''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta'k) = khf''_{yx}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_1 k)$$

и, так как $h \neq 0$ и $k \neq 0$,

$$f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta' k) = f''_{yx}(x_0 + \theta'_1 h, y_0 + \theta_1 k). \quad (7)$$

В равенстве (7) h и k по абсолютной величине могут быть как угодно малыми.

Так как по условию смешанные производные $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ в точке (x_0, y_0) непрерывны, то имеем:

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta' k) = \\ & = f''_{xy} \left[\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} (x_0 + \theta h), \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} (y_0 + \theta' k) \right] = f''_{xy}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} f''_{yx}(x_0 + \theta'_1 h, y_0 + \theta_1 k) = \\ & = f''_{yx} \left[\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} (x_0 + \theta'_1 h), \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} (y_0 + \theta_1 k) \right] = f''_{yx}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

(вместе с h и k стремятся к нулю и θh , $\theta' k$, $\theta'_1 h$, $\theta_1 k$, так как θ , θ' , θ'_1 и θ_1 , хотя и зависят от h и k , остаются ограниченными при любых значениях h и k).

Следовательно, переходя в обеих частях равенства (7) к пределу при $h \rightarrow 0$ и $k \rightarrow 0$, получим:

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0),$$

что и требовалось доказать.

Доказательство утверждения о равенстве смешанных производных, отличающихся только порядком дифференцирования, при условии их непрерывности распространяется на производные любого порядка.

Так, например, если $f'''_{xxy}(x, y)$ и $f'''_{xyx}(x, y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0) , то $f'''_{xxy}(x_0, y_0) = f'''_{xyx}(x_0, y_0)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} f'''_{xxy}(x, y) &= [f''_{xy}(x, y)]'_{xy}, \\ f'''_{xyx}(x, y) &= [f''_{yx}(x, y)]'_{yx}. \end{aligned}$$

Заметим, наконец, что доказанная здесь теорема может быть обобщена на случай функции любого числа переменных. Таким образом, верна следующая

Теорема. Если какие-либо смешанные производные порядка $m \geq 2$ от функции любого числа n переменных

отличаются между собой только порядком дифференцирования и непрерывны в некоторой точке, то они в этой точке имеют одно и то же значение.

§ 8. Дифференциалы высших порядков

Пусть в области g дана функция $z=f(x, y)$ независимых переменных x и y .

Если данная функция дифференцируема в области g , то ее полный дифференциал в точке $(x, y) \in g$, соответствующий приращениям независимых переменных dx и dy , выражается формулой:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (1)$$

Из формулы (1) видно, что при фиксированных dx и dy полный дифференциал dz есть функция от x и y , которая в свою очередь может оказаться дифференцируемой. Полный дифференциал от dz в точке (x, y) , соответствующий приращениям независимых переменных, равным прежним dx и dy , называется дифференциалом второго порядка от функции $z=f(x, y)$ и обозначается символом d^2z .

Таким образом, по определению

$$d^2z = d(dz).$$

Пусть для данной функции $z=f(x, y)$ существуют все частные производные второго порядка и они непрерывны. Тогда $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ имеют непрерывные частные производные первого порядка, и поэтому они дифференцируемы. Следовательно, будет дифференцируемым и dz , т. е. существует d^2z .

Пользуясь известными правилами дифференцирования и помня, что dx и dy — постоянные, мы получим:

$$\begin{aligned} d^2z &= d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx\right) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = \\ &= dx \cdot d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + dy \cdot d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Но по формуле полного дифференциала, примененной к $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, имеем:

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dy,$$

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy.$$

Поэтому

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Так как

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

в силу непрерывности этих смешанных производных, то для выражения дифференциала второго порядка от данной функции имеем формулу:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2, \quad (2)$$

где $(dx)^2$ и $(dy)^2$ ради простоты записаны в виде dx^2 и dy^2 .

Для краткости формулу (2) записывают условным равенством:

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z, \quad (2')$$

условившись правую часть (2') понимать так: двучлен в скобках возводится в квадрат и результат почленно умножается на z , причем z везде ставится рядом с ∂^2 , а затем слагаемые таким формальным образом составленной суммы рассматривают как произведения частных производных от функции z на дифференциалы независимых переменных x и y согласно установленным обозначениям.

Подобным же образом вводятся понятия дифференциалов третьего, четвертого и т. д. порядков. Полный дифференциал от $d^{n-1}z$ называется дифференциалом n -го порядка от функции z и обозначается символом $d^n z$:

$$d^n z = d(d^{n-1}z).$$

Таким же путем, как и в случае дифференциала второго порядка, можно убедиться в том, что если для функ-

ции $z=f(x, y)$ независимых переменных x и y существуют все частные производные n -го порядка и они непрерывны, то существует дифференциал n -го порядка от данной функции, который выражается формулой:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z, \quad (3)$$

если ее записать условным равенством.

Для функции $u=f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ от m независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_m$ при соответствующих условиях получим:

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n u. \quad (3')$$

Дифференциалы высших порядков функций от нескольких независимых переменных, как и дифференциалы первого порядка, можно вычислять, не прибегая к формулам (3) и (3'), которые требуют предварительного вычисления частных производных соответствующего порядка, а путем непосредственного применения правил дифференцирования, находя последовательно сначала дифференциал первого порядка, затем дифференциал второго порядка и т. д., пока не получим дифференциал нужного порядка. Найдя дифференциал n -го порядка данной функции, мы одновременно найдем и ее частные производные n -го порядка: они вместе с биномиальными коэффициентами составляют коэффициент при соответствующих степенях дифференциалов независимых переменных.

Пример 1. Найти дифференциал второго порядка функции

$$z = \arctg \frac{x}{y}.$$

Решение. Найдем частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\frac{1}{y}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{y}{x^2 + y^2}, & \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Затем воспользуемся формулой (2). В результате получим:

$$d^2 z = \frac{2xy dy^2 + 2(x^2 - y^2) dx dy - 2xy dx^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Пример 2. Найти дифференциал второго порядка функции

$$z = x^3 - y^3 + 2x^2 - 2y^2 + 5xy + 6x - 7y + 1.$$

Решение. По правилам дифференцирования находим:

$$dz = 3x^2 dx - 3y^2 dy + 4x dx - 4y dy + 5y dx + 5x dy + 6 dx - 7 dy.$$

Дифференцируя dz таким же образом, получим:

$$d^2 z = 6x dx^2 - 6y dy^2 + 4 dx^2 - 4 dy^2 + 10 dx dy,$$

или:

$$d^2 z = 2(3x + 2) dx^2 + 10 dx dy - 2(3y + 2) dy^2.$$

Отсюда видно, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2(3x + 2), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 5, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2(3y + 2).$$

Рассмотрим дифференциалы высших порядков функции от функций.

Пусть

$$z = f(x, y),$$

где x и y — функции одной или нескольких переменных. Полный дифференциал dz и в этом случае выражается формулой:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

так как форма дифференциала первого порядка инвариантна. Однако dx и dy в этой формуле, являясь в свою очередь дифференциалами функций, в общем случае не будут постоянными. Поэтому

$$\begin{aligned} d^2 z &= d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = \\ &= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial z}{\partial x} d(dx) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial z}{\partial y} d(dy) = \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \\ &\quad + \frac{\partial z}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2 y. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что дифференциалы высших порядков не обладают инвариантностью формы, вследствие чего фор-

мулы (3) и (3') в общем случае не применимы к функциям от функций.

Однако следует учесть, что для получения формул (3) и (3') важно не само условие, что аргументы данной функции являются независимыми переменными, а то, что из этого условия вытекает постоянство дифференциалов аргументов данной функции. Поэтому, если аргументы данной функции в свою очередь тоже функции от некоторых переменных, но имеют постоянные дифференциалы, то в этом случае формулы (3) и (3') также применимы, как и в случае функции от независимых переменных.

§ 9. Формула Тейлора

Пусть в области, где x изменяется от a до $a+h$, а y изменяется от b до $b+k$, функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до n -го порядка включительно.

Поставим себе задачей разложить $f(a+h, b+k)$ по степеням h и k . Эта задача аналогична той задаче для функции одной переменной, которая решается формулой Тейлора.

Введем в рассмотрение новую независимую переменную t , положив $x=a+ht$, $y=b+kt$. Тогда данная функция будет сложной функцией от t :

$$f(x, y) = f(a+ht, b+kt) = F(t), \quad (1)$$

определенной на отрезке $0 \leq t \leq 1$.

Функция $F(t)$, очевидно, имеет производные до n -го порядка включительно. Поэтому ее можно выразить формулой Тейлора. Разложив $F(t)$ по степеням t и записав остаточный член в форме Лагранжа, получим:

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} t + \dots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} t^{n-1} + \\ + \frac{t^n}{n!} F^{(n)}(\theta t), \quad 0 < \theta < 1.$$

Отсюда, полагая $t=1$ и замечая из соотношения (1), что $F(1) = f(a+h, b+k)$, находим:

$$f(a+h, b+k) = \\ = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \dots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} F^{(n)}(\theta). \quad (2)$$

Выразим правую часть формулы (2) при помощи исходной функции $f(x, y)$.

Из соотношения (1) имеем:

$$F(0) = f(a, b). \quad (3)$$

Производную $F^{(p)}(t) = \frac{d^p F}{dt^p}$ мы можем рассматривать как частное от деления $d^p F$ на dt^p .

Но

$$d^p F = d^p f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^p f,$$

так как аргументы x и y функции $f(x, y)$, хотя они и являются функциями от t , имеют постоянные дифференциалы $dx = hdt$, $dy = kdt$, и поэтому применима формула (3) предыдущего параграфа. Отсюда:

$$d^p F = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^p f \cdot dt^p$$

и

$$F^{(p)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^p f. \quad (4)$$

Так как при $t=0$ имеем $x=a$, $y=b$, то $F^{(p)}(0)$ мы получим, если в формуле (4) частные производные p -го порядка от функции $f(x, y)$ возьмем в точке (a, b) :

$$F^{(p)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^p f_{a, b}. \quad (5)$$

Наконец, $F^{(n)}(0)$ мы получим, взяв производную $F^{(n)}(t)$ по формуле (4) и подставив в выражения частных производных n -го порядка от функции $f(x, y)$ вместо x и y соответственно $a + \theta h$ и $b + \theta k$:

$$F^{(n)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^n f_{a+\theta h, b+\theta k}. \quad (6)$$

Выразив правую часть равенства (2) через функцию $f(x, y)$ и ее производные при помощи формул (3), (5) и (6), получим формулу:

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) = & f(a, b) + \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right) f_{a, b} + \\ & + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^2 f_{a, b} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^{n-1} f_{a, b} + \\ & + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^n f_{a+\theta h, b+\theta k} \end{aligned} \quad (7)$$

которая и решает задачу разложения $f(a+h, b+k)$ по степеням h и k .

Формула (7) есть формула Тейлора для функции двух переменных, а

$$R_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^n f_{a+\theta h, b+\theta k}$$

остаточный член формулы Тейлора для функции $f(x, y)$ в форме Лагранжа.

Пользуясь при вычислении $d^p F$ условной формулой (3) предыдущего параграфа, мы и формулу Тейлора получили в условной записи. При подробной записи формула (7) имеет вид:

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) = & f(a, b) + [f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k] + \\ & + \frac{1}{2!} [f''_{xx}(a, b)h^2 + 2f''_{xy}(a, b)hk + f''_{yy}(a, b)k^2] + \\ & + \dots + R_n. \end{aligned} \quad (7')$$

Приведем еще одну форму записи формулы Тейлора.

Обозначим в формуле (7) a и b через x и y , а h и k — через Δx и Δy . Тогда, перенося первый член правой части формулы в левую часть и обозначая разность $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$, представляющую полное приращение функции $f(x, y)$, соответствующее приращениям Δx и Δy независимых переменных x и y , через $\Delta f(x, y)$, получим:

$$\begin{aligned} \Delta f(x, y) = & df(x, y) + \frac{1}{2!} d^2 f(x, y) + \\ & + \dots + \frac{1}{(n-1)!} d^{n-1} f(x, y) + \\ & + \frac{1}{n!} d^n f(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y), \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Формулой (8) пользуются для приближенного вычисления приращения $\Delta f(x, y)$ данной функции $f(x, y)$.

При рассмотрении понятия полного дифференциала мы уже замечали, что при достаточно малых значениях Δx и Δy и $df \neq 0$ за приращение функции Δf приближенно можно принять дифференциал df . Это означает, что в формуле Тейлора (8) в правой части берется только один член, а остальные отбрасываются. Теперь ясно, что если

приближенное равенство $\Delta f \approx df$ не дает той точности, которая требуется в данной задаче, то мы можем для повышения точности воспользоваться дальнейшими членами формулы Тейлора (8).

§ 10. неявные функции

Функция $y = y(x)$, заданная уравнением вида $F(x, y) = 0$, не разрешенным относительно y , называется *неявной функцией*.

В этом же смысле можно говорить о неявных функциях нескольких переменных.

Когда дано уравнение вида $F(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$, связывающее $n + 1$ переменных, мы можем одну из этих переменных, например z , рассматривать как функцию остальных n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, определенную данным уравнением, т. е. как неявную функцию $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Однако здесь возникает вопрос о существовании и единственности этой неявной функции, т. е. вопрос о том, есть ли такие значения $x_1, x_2, \dots, x_n$, для которых существует единственное решение z уравнения $F(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$. Этот вопрос здесь мы и рассмотрим. При этом мы можем ограничиться случаем неявной функции двух переменных.

Теорема 1. Пусть относительно $F(x, y, z)$ выполнены следующие условия:

1) функция $F(x, y, z)$ определена и непрерывна в области V , где $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$, $y_0 - \delta \leq y \leq y_0 + \delta$, $z_0 - \delta \leq z \leq z_0 + \delta$;

2) в области V существуют и непрерывны частные производные F'_x, F'_y, F'_z ;

3) $F(x_0, y_0, z_0) = 0$;

4) $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Тогда в некоторой окрестности g точки (x_0, y_0) существует единственная непрерывная функция $z = f(x, y)$, принимающая значение z_0 при $x = x_0$, $y = y_0$, которая обращает уравнение

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

в тождество

$$F[x, y, f(x, y)] = 0;$$

функция $f(x, y)$ в области g имеет непрерывные частные производные f'_x и f'_y .

Доказательство. По условию $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Положим для определенности

$$F'_z(x_0, y_0, z_0) > 0. \quad (2)$$

Тогда в силу непрерывности F'_z будет верно

$$F'_z(x, y, z) > 0 \quad (2')$$

также и в некоторой окрестности u точки (x_0, y_0, z_0) .

Из неравенства (2) следует, что функция $F(x_0, y_0, z)$ одной переменной z в точке z_0 возрастает. В то же время по условию 3) в точке z_0 она равна 0. Поэтому найдется такой отрезок $[z_0 - \delta', z_0 + \delta']$, что в концах его будут верны неравенства:

$$F(x_0, y_0, z_0 - \delta') < 0, F(x_0, y_0, z_0 + \delta') > 0. \quad (3)$$

Так как по условию функция $F(x, y, z)$ в области V непрерывна, неравенства (3) останутся в силе, если в них x_0 и y_0 заменить значениями x и y , достаточно близкими к x_0 и y_0 . Поэтому найдется такое $h > 0$, что для всех x и y , удовлетворяющих условиям

$$|x - x_0| < h, |y - y_0| < h, \quad (4)$$

будут верны неравенства:

$$F(x, y, z_0 - \delta') < 0, F(x, y, z_0 + \delta') > 0. \quad (5)$$

Числа h и δ' возьмем настолько малыми, чтобы точка (x, y, z) принадлежала окрестности u , если только x и y удовлетворяют условиям (4), а z содержится на отрезке $[z_0 - \delta', z_0 + \delta']$.

Возьмем любые значения x и y , удовлетворяющие условиям (4) и, следовательно, неравенствам (5). Подставим эти выбранные и фиксированные значения x и y в выражение функции $F(x, y, z)$. Тогда $F(x, y, z)$ будет функцией одной переменной z , значения которой на концах отрезка $[z_0 - \delta', z_0 + \delta']$ противоположны по знаку (неравенства (5)). Из этого следует по теореме Коши о промежуточных значениях непрерывной функции, что существует $z \in (z_0 - \delta', z_0 + \delta')$ такое, что $F(x, y, z) = 0$. Такое значение z единственное, так как при выбранных

x и y функция $F(x, y, z)$ на отрезке $[z_0 - \delta', z_0 + \delta']$ возрастает, что следует из неравенства (2').

Итак, каждой точке (x, y) прямоугольника R , определенного неравенствами (4), соответствует единственное число z , содержащееся в интервале $(z_0 - \delta', z_0 + \delta')$, такое, что $F(x, y, z) = 0$. Точке (x_0, y_0) соответствует, очевидно, значение $z = z_0$, что видно из условия теоремы.

Этим самым в прямоугольнике R с центром в точке (x_0, y_0) мы определили функцию $z = f(x, y)$, принимающую значение z_0 при $x = x_0, y = y_0$, которая в R является единственной функцией, обращающей уравнение (1) в тождество $F(x, y, f(x, y)) = 0$. Это и доказывает существование и единственность неявной функции, определенной уравнением (1).

Докажем, что функция $z = f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике R .

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Число δ' , которым мы пользовались выше, мы всегда можем взять меньшим ε . Тогда для всех x и y , удовлетворяющих неравенствам (4), $z = f(x, y)$ будет содержаться в интервале $(z_0 - \delta', z_0 + \delta')$, входящем в интервал $(z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$, т. е. будет верно неравенство:

$$|f(x, y) - z_0| = |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

что доказывает непрерывность функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) .

Чтобы доказать непрерывность функции $z = f(x, y)$ в любой другой точке (x_1, y_1) из прямоугольника R , заметим, что в точке (x_1, y_1, z_1) , где $z_1 = f(x_1, y_1)$, и некоторой ее окрестности мы имеем все то, что дано по условиям теоремы в точке (x_0, y_0, z_0) и ее окрестности. Поэтому, взяв точку (x_1, y_1, z_1) за исходную, мы сначала докажем существование и единственность функции $z = \varphi(x, y)$, принимающей значение z_1 , при $x = x_1, y = y_1$, которая обращает уравнение (1) в тождество $F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$, а затем докажем, что при исходных значениях $x = x_1$ и $y = y_1$, т. е. в точке (x_1, y_1) , функция $\varphi(x, y)$ непрерывна. Но $\varphi(x, y) \equiv f(x, y)$, так как обе эти функции удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$ и в точке (x_1, y_1) обращаются в z_1 , а такая функция единственная.

Этим доказана непрерывность функции $z = f(x, y)$ в области R .

Докажем, наконец, что в окрестности R точки (x_0, y_0) функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Возьмем произвольную точку (x, y) из R и этим значениям x и y дадим приращения Δx и Δy , удовлетворяющие только одному условию: точка $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ также содержится в R . Тогда получим $z + \Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y)$, удовлетворяющее вместе с $x + \Delta x$ и $y + \Delta y$ уравнению $F = 0$:

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = 0.$$

Функция $F(x, y, z)$, имеющая по условию непрерывные производные F'_x, F'_y, F'_z , дифференцируема. Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta F &= F(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - F(x, y, z) = \\ &= [F'_x(x, y, z) + \alpha] \Delta x + [F'_y(x, y, z) + \beta] \Delta y + \\ &\quad + [F'_z(x, y, z) + \gamma] \Delta z, \end{aligned}$$

где α, β, γ зависят от $\Delta x, \Delta y$ и Δz и стремятся к нулю при одновременном стремлении к нулю $\Delta x, \Delta y$ и Δz .

Так как $\Delta F = 0$, ибо $F(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = 0$ и $F(x, y, z) = 0$, то

$$(F'_x + \alpha) \Delta x + (F'_y + \beta) \Delta y + (F'_z + \gamma) \Delta z = 0. \quad (6)$$

Возьмем $\Delta x \neq 0, \Delta y = 0$. Тогда соотношение (6) примет вид:

$$(F'_x + \alpha) \Delta x + (F'_z + \gamma) \Delta_x z = 0, \quad (6')$$

откуда получим:

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = - \frac{F'_x + \alpha}{F'_z + \gamma}. \quad (7)$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y = 0$ приращение $\Delta_x z$ непрерывной функции $z = f(x, y)$ стремится к нулю. А при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y = 0, \Delta_x z \rightarrow 0$ стремятся к нулю и α и γ . Поэтому ввиду условия $F'_z \neq 0$ правая часть равенства (7) имеет предел при $\Delta x \rightarrow 0$. Следовательно, при $\Delta x \rightarrow 0$ существует и предел левой части (7):

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F'_x + \alpha}{F'_z + \gamma} = - \frac{F'_x}{F'_z}.$$

Но

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Поэтому имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F'_x}{F'_z}. \quad (8)$$

Таким же образом получим:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{F'_y}{F'_z}. \quad (9)$$

Непрерывность частных производных неявной функции $z = f(x, y)$ вытекает из формул (8) и (9), выражающих $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ через производные F'_x , F'_y , F'_z , непрерывные по условию.

Теорема 1 доказана полностью.

Заметим, что равенства (8) и (9) являются формулами, выражающими производные от неявной функции $z = f(x, y)$ через частные производные от левой части уравнения $F(x, y, z) = 0$, определяющего эту неявную функцию.

Для неявной функции $y = y(x)$, определенной уравнением $F(x, y) = 0$, при соответствующих условиях имеем:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{F'_x}{F'_y}. \quad (10)$$

Если мы имеем систему m уравнений:

$$F_k(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m) = 0,$$

$k = 1, 2, \dots, m$, содержащих $n + m$ переменных, то m переменных, например $z_1, z_2, \dots, z_m$, мы можем рассматривать как неявные функции от остальных n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, определенные данной системой уравнений. Здесь также возникает вопрос существования и единственности.

Рассмотрим этот вопрос, ограничившись для простоты случаем системы двух уравнений, определяющих две неявные функции.

Теорема 2. Пусть относительно $F(x, y, u, v)$ и $\Phi(x, y, u, v)$ выполнены следующие условия:

1) функции $F(x, y, u, v)$ и $\Phi(x, y, u, v)$ определены и непрерывны в некоторой области, содержащей точку (x_0, y_0, u_0, v_0) ;

2) в этой области существуют и непрерывные частные производные первого порядка от F и Φ по всем аргументам;

3) $F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ и $\Phi(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$;

4) определитель Остроградского

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} & \frac{\partial \Phi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

в точке $M_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ не равен нулю.

Тогда в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) существует единственная пара непрерывных функций $u = f(x, y)$ и $v = \varphi(x, y)$, принимающих соответственно значения u_0 и v_0 при $x = x_0, y = y_0$, которые обращают уравнения

$$F(x, y, u, v) = 0, \quad \Phi(x, y, u, v) = 0 \quad (11)$$

в тождества

$$F[x, y, f(x, y), \varphi(x, y)] = 0 \text{ и } \Phi[x, y, f(x, y), \varphi(x, y)] = 0;$$

функции $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) имеют непрерывные частные производные $f'_x, f'_y, \varphi'_x, \varphi'_y$.

Доказательство. Так как по условию 4) в точке $M_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ $J \neq 0$, то в этой точке по крайней мере одна из производных $\frac{\partial F}{\partial u}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ не равна нулю.

Пусть $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)_{M_0} \neq 0$. Тогда по теореме 1 в некоторой окрестности W точки (x_0, y_0, v_0) существует единственная непрерывная функция:

$$u = \psi(x, y, v), \quad (12)$$

принимаяющая значение u_0 при $x = x_0, y = y_0, v = v_0$, которая обращает второе из уравнений (11) в тождество:

$$\Phi[x, y, \psi(x, y, v), v] = 0; \quad (13)$$

функция $\psi(x, y, v)$ в окрестности точки (x_0, y_0, v_0) имеет непрерывные частные производные по аргументам x, y, v .

Ограничиваясь только теми значениями x, y, v , которые определяют точки (x, y, v) из окрестности W , где определена функция $\psi(x, y, v)$, мы можем сказать, что уравнение (12) равносильно второму из уравнений (11). По-

этому система уравнений (11) равносильна системе уравнений:

$$\begin{aligned} F[x, y, \psi(x, y, v), v] &= 0, \\ u &= \psi(x, y, v). \end{aligned} \quad (14)$$

Отсюда следует, что теорема 2 будет доказана, если мы докажем существование и единственность непрерывной функции $v = \varphi(x, y)$, удовлетворяющей уравнению

$$F_1(x, y, v) = 0, \quad (15)$$

где

$$F_1(x, y, v) \equiv F[x, y, \psi(x, y, v), v],$$

и условию

$$v_0 = \varphi(x_0, y_0), \quad (16)$$

причем функция $\varphi(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) должна иметь непрерывные производные.

Но такая функция $v = \varphi(x, y)$ действительно существует, так как для уравнения (15) выполнены все условия теоремы 1. В самом деле, выполнение первых трех условий очевидно. Убедимся, что выполнено и условие 4):

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial v} \right)_{M'_0(x_0, y_0, v_0)} \neq 0.$$

По правилу дифференцирования сложных функций имеем:

$$\frac{\partial F_1}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial v}.$$

Дифференцируя тождество (13), получим:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0,$$

откуда, учитывая, что $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)_{M_0} \neq 0$, находим:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \right)_{M'_0} = - \left(\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial v}}{\frac{\partial \Phi}{\partial u}} \right)_{M_0}.$$

Подставляя это в выражение для $\frac{\partial F_1}{\partial v}$, получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_1}{\partial v}\right)_{M_0} &= \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_{M_0} \left(-\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial v}}{\frac{\partial \Phi}{\partial u}}\right)_{M_0} + \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)_{M_0} = \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)_{M_0} \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)_{M_0}} = -J_{M_0} \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)_{M_0}} \neq 0 \end{aligned}$$

(по условию $J_{M_0} \neq 0$).

Итак, $\left(\frac{\partial F_1}{\partial v}\right)_{M_0} \neq 0$, т. е. условие 4) для уравнения (15) выполнено. Следовательно, как уже заранее было отмечено, существует единственная непрерывная функция

$$v = \varphi(x, y),$$

удовлетворяющая уравнению (15) и условию (16), которая в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) имеет непрерывные производные по x и по y .

Подставив найденную функцию $v = \varphi(x, y)$ в уравнение (12), получим $u = \psi[x, y, \varphi(x, y)]$ или, обозначив $\psi[x, y, \varphi(x, y)]$ через $f(x, y)$,

$$u = f(x, y).$$

Теорема 2 доказана.

Пример. Найти уравнения касательной и нормали к плоской кривой

$$F(x, y) = 0 \quad (17)$$

в точке $M(x, y)$.

Решение. Как известно, касательная к плоской кривой выражается уравнением:

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

где X и Y — текущие координаты, x и y — координаты точки касания, а $\frac{dy}{dx}$ — значение в точке (x, y) производной y по x , найденной из уравнения кривой.

Уравнение нормали к той же кривой в точке (x, y) есть

$$Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x).$$

Так как для кривой, заданной уравнением (17),

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)},$$

то касательная к данной кривой (17) в точке $M(x, y)$ выражается уравнением:

$$Y - y = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}(X - x),$$

которое можно привести к виду:

$$F'_x(x, y)(X - x) + F'_y(x, y)(Y - y) = 0. \quad (18)$$

Заметим, что если $M(x, y)$ есть особая точка, в которой одновременно $F'_x(x, y) = 0$ и $F'_y(x, y) = 0$, то уравнение (18) теряет смысл, превращаясь в тождество $0 = 0$.

Уравнение нормали к кривой (17) в обыкновенной точке $M(x, y)$ есть

$$Y - y = \frac{F'_y(x, y)}{F'_x(x, y)}(X - x),$$

или

$$\frac{X - x}{F'_x(x, y)} = \frac{Y - y}{F'_y(x, y)}. \quad (19)$$

§ 11. Максимумы и минимумы функций нескольких переменных

Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой области g и точка (a, b) содержится внутри этой области.

Если существует такое число $\delta > 0$, что для всех h и k , удовлетворяющих условиям

$$|h| < \delta, \quad |k| < \delta,$$

верно неравенство

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) \leq 0, \quad (1)$$

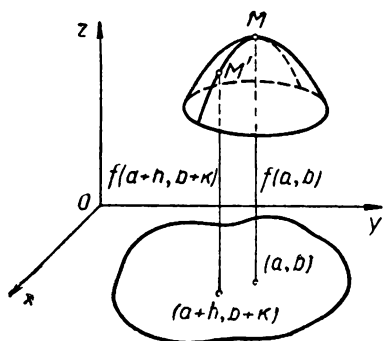
то точка (a, b) называется точкой максимума функции $f(x, y)$, если же

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) \geq 0, \quad (2)$$

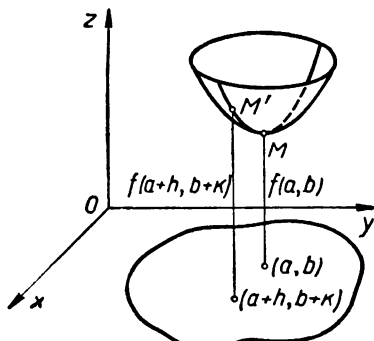
то точка (a, b) называется точкой минимума функции $f(x, y)$.

Эти определения означают, что точка (a, b) есть точка максимума функции $f(x, y)$, если существует такая доста-

точно малая окрестность точки (a, b) , что во всех точках этой окрестности значения функции $f(x, y)$ не превосходят $f(a, b)$ (черт. 11); точка (a, b) — точка минимума функции $f(x, y)$, если во всех точках некоторой окрестности точки (a, b) значения $f(x, y)$ не меньше $f(a, b)$ (черт. 12).



Черт. 11



Черт. 12

Значение функции в точке максимума называется максимумом, а значение функции в точке минимума — минимумом этой функции.

Точки максимума и точки минимума функции называются точками экстремума функции, а максимумы и минимумы функции — экстремумами функции.

Необходимое условие экстремума. Пусть функция $f(x, y)$ в точке (a, b) имеет частные производные первого порядка. Для того чтобы точка (a, b) была точкой экстремума функции $f(x, y)$, необходимо, чтобы

$$f'_x(a, b) = 0 \text{ и } f'_y(a, b) = 0.$$

В самом деле, если функция $f(x, y)$ в точке (a, b) имеет, например, максимум, то функция $f(x, b)$ одной переменной x , очевидно, имеет максимум при $x = a$; поэтому в силу необходимого условия экстремума функции одной переменной производная от $f(x, b)$ в точке $x = a$, которая при данных условиях существует и равняется частной производной $f'_x(x, y)$ в точке (a, b) , должна равняться нулю, т. е. должно быть выполнено условие $f'_x(a, b) = 0$. Взяв функцию $f(a, y)$, подобными же рассуждениями получим, что должно быть выполнено условие $f'_y(a, b) = 0$.

Понятия максимума и минимума функции любого числа переменных определяются по существу совершенно так же, как и в случае функции двух переменных.

Для того чтобы точка $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ была точкой экстремума функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, имеющей в этой точке частные производные первого порядка по всем аргументам, необходимо выполнение условия

$$f'_{x_k}(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

В этом можно убедиться такими же рассуждениями, как и в случае функции двух переменных.

Точку $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, определенную системой уравнений

$$f'_{x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

в которой, следовательно, выполнено необходимое условие экстремума функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, мы будем называть критической точкой этой функции.

Таким образом, в критической точке функция может иметь (но вовсе не обязательно имеет) максимум или минимум.

При решении практических вопросов иногда бывает заранее ясно, что данная функция имеет максимум (минимум) и в то же время вычисления показывают, что для этой функции есть только одна критическая точка. В таком случае единственная критическая точка будет, конечно, точкой максимума (минимума) данной функции.

Пример 1. Найти размеры прямоугольного бассейна данного объема v так, чтобы на его облицовку (дна и стен) потребовалось материала как можно меньше.

Решение. Пусть x и y — размеры дна бассейна, а z — глубина бассейна. Тогда

$$v = xyz.$$

Пусть S — площадь дна и стен бассейна. Задача, очевидно, заключается в отыскании минимума S .

Так как

$$S = xy + 2yz + 2xz,$$

причем

$$z = \frac{v}{xy},$$

то

$$S = xy + \frac{2v}{y} + \frac{2v}{x}.$$

Чтобы найти значения x и y , при которых S может иметь минимум, найдем частные производные:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{2v}{x^2}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{2v}{y^2},$$

приравняв их к нулю:

$$y - \frac{2v}{x^2} = 0, \quad x - \frac{2v}{y^2} = 0,$$

и, решив полученную систему уравнений, найдем в области $x > 0$ и $y > 0$, где имеет смысл рассматривать S , одну критическую точку:

$$x_1 = \sqrt[3]{2v}, \quad y_1 = \sqrt[3]{2v}.$$

При $x = x_1$, $y = y_1$ имеем:

$$z = z_1 = \frac{v}{x_1 y_1} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{2v}.$$

Следовательно, площадь S может иметь минимум только при условии:

$$x = y = \sqrt[3]{2v}, \quad z = \frac{1}{2} \sqrt[3]{2v}.$$

При полученных значениях x , y и z площадь S действительно имеет минимум.

В самом деле, при больших значениях x и y (при малом z) площадь S может быть сделана сколь угодно большой за счет площади дна. Уменьшая x и y (увеличивая z), мы площадь S сначала будем уменьшать. Но при достаточно малых x и y глубина z будет столь значительной, что S опять приобретет очень большое значение за счет площади стен бассейна. Поэтому при переходе от очень больших значений x и y к очень малым мы в какой-то момент получим минимальную площадь S .

Следовательно, минимум S существует. Но он может быть только в критической точке. А так как в данном случае критическая точка только одна:

$$x_1 = y_1 = \sqrt[3]{2v},$$

то ясно, что именно в этой точке S имеет минимум.

Итак, бассейн данного объема, на облицовку которого требуется минимальное количество материала, имеет квадратное дно и глубину, вдвое меньшую стороны квадратного дна.

Однако не всегда бывает просто разобраться, есть ли в критической точке экстремум, а если есть, то что именно — максимум или минимум. Поэтому важно иметь не только необходимое условие экстремума, но и достаточные условия существования максимума и минимума функции в критических точках, а также и достаточные условия отсутствия экстремума функции в критической точке.

Достаточные условия максимума и минимума для функции двух переменных. Пусть функция $f(x, y)$ в некоторой окрестности точки (a, b) имеет непрерывные производные первого и второго порядка, причем $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$, т. е. точка (a, b) — критическая точка для функции $f(x, y)$.

Рассмотрим разность $f(a+h, b+k) - f(a, b)$, представляющую левую часть неравенств (1) и (2), при помощи которых были определены точки максимума и минимума функции $f(x, y)$.

По формуле Тейлора:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + [f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k] + \\ + \frac{1}{2!} [f''_{xx}(x, y)h^2 + 2f''_{xy}(x, y)hk + f''_{yy}(x, y)k^2]_{x=a+\theta h, y=b+\theta k}.$$

Отсюда, учитывая, что по условию

$$f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0,$$

имеем:

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \\ = \frac{1}{2} [f''_{xx}(x, y)h^2 + 2f''_{xy}(x, y)hk + f''_{yy}(x, y)k^2]_{x=a+\theta h, y=b+\theta k}. \quad (3)$$

Обозначив

$$A = f''_{xx}(x, y), \quad B = f''_{xy}(x, y), \quad C = f''_{yy}(x, y),$$

равенство (3) запишем в виде

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \\ = \frac{1}{2} (Ah^2 + 2Bhk + Ck^2)_{x=a+\theta h, y=b+\theta k}. \quad (3')$$

Пусть

$$AC - B^2 > 0 \quad (4)$$

в точке (a, b) и, значит, в некоторой окрестности g' точки (a, b) , так как частные производные второго порядка от функции $f(x, y)$ по условию непрерывны.

При условии (4) A не равняется нулю, и поэтому в некоторой окрестности g'' точки (a, b) в силу непрерывности имеет постоянный знак, совпадающий со знаком A в точке (a, b) . Но в области, где $A \neq 0$, верно тождество:

$$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = \frac{1}{A} [(Ah + Bk)^2 + (AC - B^2)k^2].$$

Отсюда видно, что при условии (4) в некоторой окрестности g точки (a, b) знак трехчлена $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ совпадает со знаком A в точке (a, b) (а также и со знаком C , ибо при условии (4) A и C не могут иметь разные знаки).

Так как в силу (3') знак $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ в точке $(a + \theta h, b + \theta k)$ определяет и знак разности $f(a + h, b + k) - f(a, b)$, приходим к следующему выводу:

Если для функции $f(x, y)$ в критической точке (a, b) выполнено условие (4) и $A < 0$ ($C < 0$), то для всех достаточно малых h и k верно неравенство (1), и поэтому в точке (a, b) функция $f(x, y)$ имеет максимум; если же в критической точке (a, b) выполнено условие (4) и $A > 0$ ($C > 0$), то для всех достаточно малых h и k верно неравенство (2), и поэтому в точке (a, b) функция $f(x, y)$ имеет минимум.

Рассмотрим случай, когда в точке (a, b)

$$AC - B^2 < 0. \quad (5)$$

В этом случае положим:

$$\begin{aligned} & (Ah^2 + 2Bhk + Ck^2)_{a+\theta h, b+\theta k} = \\ & = (Ah^2 + 2Bhk + Ck^2)_{a,b} + (\alpha h^2 + 2\beta hk + \gamma k^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Из непрерывности частных производных второго порядка от данной функции следует, что α , β и γ стремятся к нулю при $h \rightarrow 0$ и $k \rightarrow 0$. Поэтому при достаточно малых h и k знак левой части (6) определяется знаком первого трехчлена правой части (6), если только первый трехчлен не равен нулю, так как второй трехчлен высшей малости.

Пусть при условии (5) $(A)_{a,b} \neq 0$. Тогда при $k=0$, $h \neq 0$ трехчлен

$$(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2)_{a,b} = (A)_{a,b} h^2$$

имеет тот же знак, что и $(A)_{a,b}$, а при $k \neq 0$, $h = -\left(\frac{B}{A}\right)_{a,b} k$ тот же трехчлен

$$\begin{aligned}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2)_{a,b} &= \left(\frac{B^2}{A} k^2 - 2 \frac{B^2}{A} k^2 + Ck^2\right)_{a,b} = \\ &= \left(\frac{AC - B^2}{A}\right)_{a,b} k^2\end{aligned}$$

имеет знак, противоположный знаку $(A)_{a,b}$. Поэтому при условии (5) и $(A)_{a,b} \neq 0$ знак левой части (6) не будет постоянным при изменении h и k .

Пусть выполнено условие (5) и $(A)_{a,b} = 0$. Тогда $(B)_{a,b} \neq 0$. Здесь возможны два случая:

1) $C = 0$ и 2) $C \neq 0$.

Если $C = 0$, то

$$(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2)_{a,b} = 2(B)_{a,b} hk.$$

Так как при $h = k$ и при $h = -k$ значения $2(B)_{a,b} hk$ противоположны по знаку, то в этом случае знак левой части (6) меняется при изменении h и k .

Если $C \neq 0$, то

$$(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2)_{a,b} = (2Bhk + Ck^2)_{a,b}.$$

Так как при $h = 0$, $k \neq 0$

$$(2Bhk + Ck^2)_{a,b} = k^2 (C)_{a,b},$$

а при $k \neq 0$, $h = -k \left(\frac{C}{B}\right)_{a,b}$

$$(2Bhk + Ck^2)_{a,b} = -k^2 (C)_{a,b},$$

то и в этом случае знак левой части (6) меняется при изменении h и k .

Итак, при выполнении условия (5) знак трехчлена

$$(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2)_{a+\theta h, b+\theta k}$$

и, следовательно, знак разности $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ меняется при изменении h и k в интервале $(-\delta, \delta)$, каким бы малым $\delta > 0$ мы ни выбрали. Поэтому при выполнении в критической точке (a, b) условия (5) функция $f(x, y)$ в точке (a, b) не имеет ни максимума, ни минимума.

Случай, когда в критической точке $AC - B^2 = 0$, мы рассматривать не будем ввиду сложности исследования в этом случае.

Таким образом, для исследования функции двух переменных на максимум и минимум мы получили следующее

Правило. Чтобы найти точки максимума и минимума функции двух переменных $f(x, y)$, надо найти частные производные первого порядка от данной функции, приравнять их к нулю и решить полученную при этом систему уравнений:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 0, \\ f'_y(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Тем самым мы найдем критические точки.

Затем надо найти частные производные второго порядка от данной функции $f(x, y)$ и составить

$$\Delta = f''_{xx}(x, y)f''_{yy}(x, y) - f''_{xy}{}^2(x, y).$$

Если в критической точке (a, b) $\Delta > 0$, то в этой точке функция $f(x, y)$ имеет максимум при условии $f''_{xx}(a, b) < 0$ (или $f''_{yy}(a, b) < 0$) и минимум при условии $f''_{xx}(a, b) > 0$ (или $f''_{yy}(a, b) > 0$).

Если в критической точке $\Delta < 0$, то в этой точке нет ни максимума, ни минимума данной функции.

Если же в критической точке $\Delta = 0$, то вопрос о том, есть ли в этой точке максимум или минимум данной функции, остается нерешенным.

Пример. Найти точки максимума и минимума функции

$$z = xy(1 - x - y).$$

Решение. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y(1 - x - y) - xy = y(1 - 2x - y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x(1 - x - y) - xy = x(1 - x - 2y).$$

Приравняем их к нулю:

$$\begin{aligned} y(1 - 2x - y) &= 0, \\ x(1 - x - 2y) &= 0. \end{aligned}$$

Решив полученную систему уравнений, найдем критические точки:

$$\begin{aligned} x_1 = 0, \quad y_1 = 0; \quad x_2 = 0, \quad y_2 = 1; \quad x_3 = 1, \quad y_3 = 0; \\ x_4 = \frac{1}{3}, \quad y_4 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 - 2x - 2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x.$$
$$\Delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 4xy - (1 - 2x - 2y)^2.$$
$$\Delta(0, 0) < 0, \quad \Delta(0, 1) < 0, \quad \Delta(1, 0) < 0, \quad \Delta\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) > 0.$$

Отсюда следует, что данная функция в точках $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ не имеет ни максимума, ни минимума, а в точке $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ имеет экстремум; так как $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}} < 0$, то данная функция в точке $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ имеет максимум.

Здесь мы поставим себе задачей найти необходимое условие экстремума функции

от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, связанных между собой соотношениями:

где $m < n$.

Экстремумы функций от переменных, которые связаны между собой некоторыми соотношениями (условиями), называются условными экстремумами.

Уравнения (2) определяют m переменных из числа всех n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ как неявные функции от остальных $n - m$ переменных. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_m$ функции от $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ (при этом мы полагаем, что в окрестности некоторой точки, где исследуем данную функцию на экстремум, выполнены соответствующие условия теоремы существования и единственности неявных функций). Тогда $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будет сложной функцией от $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$:

$$z = z(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n). \quad (1')$$

Выберем $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ так, чтобы в равенстве (5) суммы в скобках равнялись нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_k} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k} = 0, \quad (6)$$

$$k = 1, 2, \dots, m.$$

(Система (6) относительно $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ имеет решение, так как определитель системы есть определитель Остроградского для $x_1, x_2, \dots, x_m$ и он не равен нулю, коль скоро условия существования неявных функций $x_1, x_2, \dots, x_m$, определенных уравнениями (2), мы приняли выполненными.) Но тогда будет равняться нулю и сумма последней группы слагаемых в (5):

$$\frac{\partial f}{\partial x_{m+i}} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{m+i}} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{m+i}} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{m+i}} = 0, \quad (7)$$

$$i = 1, 2, \dots, n - m.$$

Таким образом, имеем одновременно соотношения (6) и (7), т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} &= 0, \\ . &. \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Следовательно, необходимое условие экстремума функции (1) при данных условиях (2) (условного экстремума) выражается системой уравнений (8).

Уравнения (8) и (2) вместе образуют систему $n + m$ уравнений относительно $n + m$ неизвестных: $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Исключив из этой системы уравнений неопределенные множители $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, мы получим систему n уравнений, откуда и находим критические точки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, в которых только и может быть условный экстремум данной функции (1) при условиях (2).

Заметим, что для получения уравнений (8) достаточно взять функцию

$$u = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_m \varphi_m,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — неопределенные постоянные множители, и приравнять к нулю все ее частные производные первого порядка.

Этот способ отыскания критических точек на условный экстремум называется способом множителей Лагранжа.

Пример. Найти размеры цилиндра данного объема v , имеющего наименьшую площадь поверхности.

Решение. Пусть x — радиус основания, а y — высота цилиндра. Тогда площадь поверхности цилиндра равна $2\pi x^2 + 2\pi xy$, или $2\pi(x^2 + xy)$, а объем цилиндра равен $\pi x^2 y$.

Следовательно, для решения данной задачи надо найти точку условного экстремума функции

$$f(x, y) = x^2 + xy$$

при условии

$$\pi x^2 y = v.$$

Для этого составим функцию:

$$u = x^2 + xy + \lambda(\pi x^2 y - v),$$

найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y + 2\pi\lambda xy,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \pi\lambda x^2,$$

приравняем их к нулю и образуем систему уравнений:

$$2x + y + 2\pi\lambda xy = 0,$$

$$x + \pi\lambda x^2 = 0,$$

$$\pi x^2 y = v.$$

Исключив λ из первых двух уравнений этой системы, получим:

$$2x - y = 0,$$

$$\pi x^2 y = v.$$

Отсюда

$$y = 2x, \quad 2\pi x^3 = v$$

и, следовательно,

$$x = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}, \quad y = 2\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}.$$

Нетрудно заметить, что площадь поверхности цилиндра и, значит, функция $f(x, y)$ минимум имеет. А минимум

может быть только в критической точке. Так как в данном случае есть только одна критическая точка, то она и будет точкой минимума.

Итак, площадь поверхности цилиндра данного объема будет минимальной, если $2x=y$, и, следовательно, осевое сечение цилиндра есть квадрат.

ГЛАВА II

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Задачи, приводящие к двойным интегралам

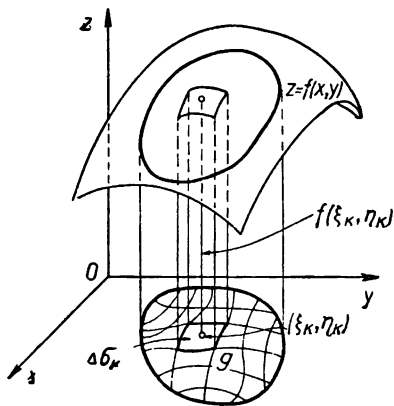
Определение объема цилиндрического тела. Пусть в прямоугольной системе координат xOy дано цилиндрическое тело, ограниченное плоскостью xOy , поверхностью $z=f(x, y)$, где $f(x, y) > 0$, и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz , а направляющей служит замкнутый контур, ограничивающий на плоскости xOy некоторую область g (черт. 13).

Определим объем данного тела. Для этого естественно воспользоваться следующим путем.

Область g , лежащую в основании данного цилиндрического тела, разобьем на n частей: $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$.

Для каждой элементарной области $\Delta\sigma_k$ мы возьмем цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны оси Oz , а направляющей служит контур, ограничивающий $\Delta\sigma_k$. Эти поверхности разобьют цилиндрическое тело на цилиндрические столбики.

Внутри или на границе $\Delta\sigma_k$ выберем произвольным образом точку (ξ_k, η_k) . Обозначая площадь элементарной области $\Delta\sigma_k$ тем же символом $\Delta\sigma_k$, мы можем число



Черт. 13

$f(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k$ принять за объем цилиндрического столбика, соответствующего $\Delta \sigma_k$, так как значения $f(x, y)$ в области $\Delta \sigma_k$ мало отличаются от $f(\xi_k, \eta_k)$, если только область $\Delta \sigma_k$ достаточно мала, что будет при достаточно мелком делении области g . Объем же всего тела, разбитого на

столбики, можно считать близким к сумме $\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k$, если только диаметры элементарных областей $\Delta \sigma_k$ малы. (Диаметр фигуры есть наибольшее из расстояний между точками контура этой фигуры.)

Отсюда следует, что за объем v данного цилиндрического тела естественно принять предел суммы

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k$$

при стремлении к нулю наибольшего из диаметров частей $\Delta \sigma_k$ области g , если только такой предел существует.

Определение массы тонкой пластинки. Тонкую пластинку g мы можем рассматривать как массу, распространенную по плоской фигуре g в плоскости xOy . Плотность, которая в общем случае изменяется от точки к точке, обозначим $\mu(x, y)$.

Для определения массы пластинки естественно поступить следующим образом.

Разобьем фигуру g на части $\Delta \sigma_k$ ($k=1, 2, \dots, r$). Плотность в каждой части $\Delta \sigma_k$ будем считать постоянной и равной плотности в произвольно выбранной

точке $(\xi_k, \eta_k) \in \Delta \sigma_k$. Тогда сумма $\sum_{k=1}^n \mu(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k$ будет приближенным выражением массы пластинки g , тем более точным, чем мельче деление пластинки g .

Следовательно, за массу M пластинки g надо принять предел суммы $\sum_{k=1}^n \mu(x, y) \Delta \sigma_k$ при стремлении к нулю наибольшего из диаметров частей $\Delta \sigma_k$ области g .

Таким образом, рассмотренные здесь задачи об определении объема цилиндрического тела и о массе тонкой

пластинки связаны с вычислением пределов вида

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k,$$

где d — наибольший из диаметров элементарных частей $\Delta \sigma_k$, образованных делением области g , в которой рассматривается в данной задаче функция $f(x, y)$.

Сумма $\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k$ по своей структуре аналогична

интегральной сумме $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ для функции одной переменной $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, предел которой есть определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$. Только новая сумма связана с функцией двух переменных $f(x, y)$ и делением двумерной области g .

Следовательно, задачи, связанные с вычислением пределов сумм вида $\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k$, требуют введения понятия, представляющего распространение понятия интеграла на случай функции двух переменных. Такое требование выполняется введением двойного интеграла.

§ 2. Понятие квадратуемой фигуры

Для определения двойного интеграла требуется, чтобы было точно установлено понятие площади плоской фигуры, представляющей замкнутую область, ограниченную одной или несколькими замкнутыми кривыми, составляющими границу или контур этой области.

Мы будем считать, что для многоугольной фигуры или многоугольника понятие площади известно из элементарной геометрии. Наша задача здесь заключается в том, чтобы естественным образом распространить понятие площади и на случай произвольной ограниченной фигуры.

Пусть g есть произвольная ограниченная замкнутая область на плоскости.

Обозначим через Q площадь произвольной многоугольной области, содержащейся в области g , а через Q' — площадь произвольной многоугольной области, которая содержит в себе область g . Таких многоугольных областей можно образовать бесконечное множество, поэтому имеем бесконечное множество значений как Q , так и Q' .

Ясно, что множество $\{Q\}$ ограничено сверху, поэтому имеет верхнюю грань, которую мы обозначим через P_* , а множество $\{Q'\}$ ограничено снизу и имеет нижнюю грань P^* .

Так как всегда $Q \leq Q'$, то имеем:

$$P_* \leq P^*.$$

Если окажется, что P_* и P^* совпадают, то их общее значение и естественно принять за площадь области g .

Таким образом, мы приходим к следующему определению:

Если верхняя грань P_* площадей многоугольников, содержащихся в области g , совпадает с нижней гранью P^* площадей многоугольников, содержащих g , то область g называется к в а д р и р у е м о й, а число

$$P = P_* = P^*$$

п л о щ а д ь ю области g .

Теорема 1. Для того чтобы область g была к в а д р и р у е м о й, необходимо и достаточно, чтобы можно было образовать последовательность многоугольников, содержащихся в g , и последовательность многоугольников, содержащих g , так, что соответствующие последовательности площадей этих многоугольников будут иметь общий предел P ; при выполнении этого условия предел P и будет площадью области g .

Необходимость. Пусть область g к в а д р и р у е м а и ее площадь равна P .

Число P мы можем рассматривать как верхнюю грань множества значений площадей многоугольников, содержащихся в g . Поэтому для любого $\epsilon > 0$ найдется многоугольник, содержащийся в g , площадь которого будет больше $P - \epsilon$.

Рассматривая P как нижнюю грань площадей многоугольников, содержащих g , замечаем, что для любого $\epsilon > 0$ найдется многоугольник, содержащий g , площадь которого будет меньше $P + \epsilon$.

Полагая ϵ равным последовательно

$$1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots,$$

мы получим последовательность площадей

$$Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots$$

многоугольников, содержащихся в g , удовлетворяющих условию

$$P - \frac{1}{n} < Q_n$$

и последовательность площадей

$$Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_n, \dots$$

многоугольников, содержащих g , удовлетворяющих условию

$$Q'_n < P + \frac{1}{n}.$$

Так как при любом n

$$P - \frac{1}{n} < Q_n \leq Q'_n < P + \frac{1}{n},$$

то имеем:

$$\lim Q_n = \lim Q'_n = P.$$

Достаточность. Пусть для области g существует последовательность многоугольников, содержащихся в g , и последовательность многоугольников, содержащих g , и пусть соответствующие последовательности площадей этих многоугольников

$$\{Q_n\} \text{ и } \{Q'_n\}$$

имеют общий предел P .

Так как для любого n имеем $Q_n \leq P_*$, где P_* — верхняя грань множества площадей всевозможных многоугольников, содержащихся в g , то

$$P = \lim Q_n \leq P_*.$$

В то же время для всех n верно $Q'_n \geq P^*$, где P^* — нижняя грань площадей многоугольников, содержащих g , и поэтому

$$P = \lim Q'_n \geq P^*.$$

Наконец, из цепочки неравенств

$$P \leq P_* \leq P^* \leq P$$

видим, что

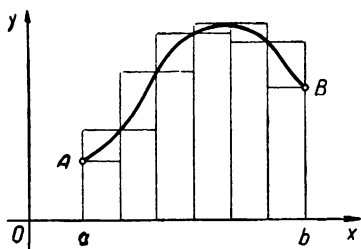
$$P_* = P^* = P,$$

а это означает, что область g квадратуема и ее площадь равна P .

Из этой теоремы следует, что определение площади круга в элементарной геометрии как общего предела последовательности площадей вписанных многоугольников и последовательности площадей описанных многоугольников

совпадает с принятым нами выше определением площади плоской фигуры.

Из этой же теоремы видно, что определение площади криволинейной трапеции $aABb$ (черт. 14) как общего предела площадей ступенчатых фигур, содержащихся в криволинейной трапеции $aABb$, и площадей ступенчатых фи-



Черт. 14

гур, содержащих эту криволинейную трапецию, согласуется с введенным здесь общим определением площади плоской фигуры.

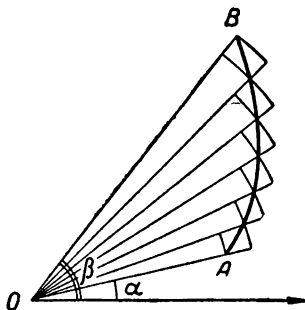
Теорема 2. Для того чтобы область g была квадратуемой, необходимо и достаточно, чтобы можно было образовать последовательность квадратуемых фигур, содержащихся в g , и последовательность квадратуемых фигур, содержащих g , так, что соответствующие последовательности площадей этих фигур будут иметь общий предел P ; при выполнении этого условия предел P и будет площадью области g .

Необходимость непосредственно следует из теоремы 1.

Достаточность. В каждой квадратуемой фигуре, содержащейся в g , можно взять многоугольник, имеющий площадь сколь угодно мало отличную от площади этой фигуры. Каждую квадратуемую фигуру, содержащую g , можно охватить многоугольником, по площади тоже сколь угодно близким к этой фигуре.

Следовательно, одновременно с данными последовательностями квадратуемых фигур, о которых говорится в этой теореме, мы можем рассматривать последовательность многоугольников, содержащихся в g , и последовательность многоугольников, содержащих g , составив их так, что соответствующие последовательности площадей этих многоугольников будут сходиться к тому же пределу P . В силу теоремы 1 это и доказывает справедливость нашего утверждения.

Из теоремы 2 вытекает, что определение площади P криволинейного сектора $OABO$, ограниченного кривой $\rho = f(\theta)$ и прямыми $\theta = \alpha$ и $\theta = \beta$ (черт. 15), как общего предела площадей ступенчатых фигур, составленных из элементарных круговых секторов, согласуется с принятым здесь общим определением площади плоской фигуры. Поэтому здесь нет противоречия с известной формулой:



Черт. 15

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta.$$

Следующая теорема выражает условие квадратуемости фигуры при помощи характеристики контура этой фигуры.

Теорема 3. Для того чтобы фигура g , ограниченная контуром Γ , была квадратуема, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\epsilon > 0$ контур Γ можно было заключить в такую многоугольную область, площадь которой меньше ϵ .

Необходимость. Пусть фигура g квадратуема и ее площадь равна P . Тогда найдется многоугольник, содержащийся в g , площадь Q которого будет больше $P - \frac{\epsilon}{2}$. Контур этого многоугольника обозначим через K . В то же время найдется многоугольник, содержащий g , площадь Q' которого меньше, чем $P + \frac{\epsilon}{2}$. Контур этого многоугольника обозначим через K' .

Остается заметить, что многоугольная область, границу которой составляют K и K' , содержит контур Γ и имеет площадь, равную

$$Q' - Q < \epsilon.$$

Достаточность. Пусть для любого сколь угодно малого $\epsilon > 0$ контур Γ можно заключить в многоугольную область, площадь которой меньше ϵ . Обозначим эту область через M .

Множество тех точек области g , которые не принадлежат M , есть, очевидно, многоугольная область, содержащаяся в g . Пусть Q — ее площадь. Присоединив M к этой многоугольной области, мы получим новую многоугольную область, уже содержащую g и имеющую площадь $Q' = Q + \text{пл. } M < Q + \epsilon$.

Так как

$$Q \leq P_* \leq P^* \leq Q',$$

где P_* — верхняя грань множества площадей всевозможных многоугольников, содержащихся в g , а P^* — нижняя грань площадей многоугольников, содержащих g , то

$$P^* - P_* < \epsilon,$$

что в силу произвольной малости ϵ возможно только при

$$P^* = P_* = P.$$

А это означает, что область g квадратуема.

Следствие. Если контур Γ фигуры g состоит из некоторого числа непрерывных кривых, каждая из которых задана уравнением вида $y = f(x)$ или $x = \varphi(y)$, то фигура g квадратуема.

В самом деле, рассмотрим участок AB контура Γ , заданный уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная функция на соответствующем отрезке $[a, b]$.

Так как функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ интегрируема и

$$\int_a^b f(x) dx = \lim s = \lim S,$$

где s и S — суммы Дарбу, то для любого $\epsilon > 0$ можно построить такое разбиение отрезка $[a, b]$, что будет верно неравенство

$$S - s < \epsilon.$$

Но $S - s$ выражает площадь многоугольной области, содержащей кривую AB , которая получится, если из ступенчатой фигуры, содержащей криволинейную трапецию $aABb$, удалить ступенчатую фигуру, содержащуюся в криволинейной трапеции $aABb$ (черт. 14).

Такие же рассуждения применимы и к участку Γ , заданному уравнением $x = \varphi(y)$.

Остается, наконец, заметить, что если каждый из конечного числа участков Γ можно заключить в многоугольную область сколь угодно малой площади, то и относительно всего контура Γ можно сказать то же самое. Согласно теореме 3 это и доказывает квадратуемость фигуры g , ограниченной рассмотренного вида контуром Γ .

Теорема 4. Пусть область g состоит из двух частей — g_1 и g_2 . Если g_1 и g_2 квадратуемы, то квадратуема и область g . Если при этом g_1 и g_2 не имеют общих точек, кроме, быть может, точек на их границах Γ_1 и Γ_2 , то площадь P области g равна сумме площадей P_1 и P_2 фигур g_1 и g_2 .

Доказательство. Возьмем любое $\epsilon > 0$.

Так как по условию фигура g_1 квадратуема, то ее контур Γ_1 можно заключить в многоугольную область M_1 , площадь которой меньше $\frac{\epsilon}{2}$. Из квадратуемости фигуры g_2 следует, что ее контур Γ_2 можно заключить в многоугольную область M_2 , площадь которой также будет меньше $\frac{\epsilon}{2}$. Так как M_1 и M_2 вместе образуют многоугольную область, которая содержит контур Γ области g и имеет площадь, меньшую ϵ , то квадратуемость области g доказана.

Допустим теперь, что g_1 и g_2 не имеют общих точек, кроме, быть может, точек на Γ_1 и Γ_2 , и докажем, что $P = P_1 + P_2$.

Множество тех точек g_1 , которые не принадлежат M_1 , есть многоугольная область A_1 , содержащаяся в g_1 . Пусть Q_1 — ее площадь. Присоединив M_1 к A_1 , мы получим многоугольную область B_1 , содержащую g_1 и имеющую площадь $Q_1' < Q_1 + \frac{\epsilon}{2}$.

Точки g_2 , не принадлежащие M_2 , составляют многоугольную область A_2 , содержащуюся в g_2 . Пусть Q_2 — ее площадь. Присоединив M_2 к A_2 , мы получим много-

угольную область B_2 , содержащую g_2 и имеющую площадь $Q'_2 < Q_2 + \frac{\epsilon}{2}$.

Ясно, что

$$Q_1 \leq P_1 \leq Q'_1 < Q_1 + \frac{\epsilon}{2},$$

$$Q_2 \leq P_2 \leq Q'_2 < Q_2 + \frac{\epsilon}{2},$$

а, значит,

$$Q_1 + Q_2 \leq P_1 + P_2 < Q_1 + Q_2 + \epsilon.$$

Заметим затем, что многоугольники A_1 и A_2 вместе образуют многоугольную область с площадью $Q_1 + Q_2$, которая содержится в области g , а многоугольники B_1 и B_2 вместе составляют многоугольную область, содержащую g и имеющую площадь, не большую чем $Q'_1 + Q'_2$. Поэтому

$$Q_1 + Q_2 \leq P \leq Q'_1 + Q'_2 < Q_1 + Q_2 + \epsilon.$$

Таким образом, P и $P_1 + P_2$ содержатся между одной и той же парой чисел $Q_1 + Q_2$ и $Q_1 + Q_2 + \epsilon$, которые могут быть как угодно близкими между собой.

Следовательно,

$$P = P_1 + P_2.$$

Это равенство выражает свойство аддитивности площади.

Из этого же равенства следует, что

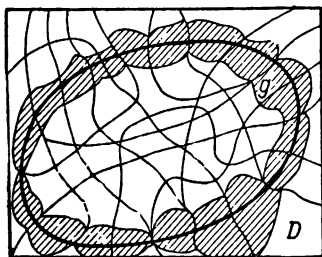
$$P_1 = P - P_2 \leq P,$$

т. е. площадь части области g не может быть больше площади всей области g .

Остановимся еще на одной формулировке условия квадратуемости области.

Образуем какую угодно квадратуемую фигуру D (например, прямоугольник) так, чтобы область g вместе с ее контуром Γ содержалась внутри этой фигуры D (черт. 16).

Произвольными линиями разобьем фигуру D на квадратуемые части $\Delta\sigma_i$. Наибольший из диаметров элементар-



Черт. 16

ных областей $\Delta\sigma_i$ обозначим через d . Обратим внимание на частичные области $\Delta\sigma_i$ двух видов:

1) внутренние, каждая точка которых содержится внутри области g или на ее контуре Γ , и 2) граничные, имеющие как точки, содержащиеся внутри или на границе g , так и точки, находящиеся вне контура Γ (на чертеже граничные частичные области покрыты штриховкой).

Внутренние $\Delta\sigma_i$ вместе образуют фигуру, содержащуюся в области g . По теореме 4 эта фигура квадритуема. Обозначим ее площадь через $\tilde{Q}$. Внутренние и граничные $\Delta\sigma_i$ вместе образуют фигуру, содержащую область g . Эта фигура также квадритуема. Обозначим ее площадь через $\tilde{Q}'$. Ясно, что $\tilde{Q}$ и $\tilde{Q}'$ зависят от способа разбиения фигуры D на части $\Delta\sigma_i$.

Теорема 5. Для того чтобы область g была квадритуема, необходимо и достаточно, чтобы при $d \rightarrow 0$ площади $\tilde{Q}$ и $\tilde{Q}'$ стремились к общему пределу P ; при выполнении этого условия предел P и будет площадью области g .

Достаточность прямо следует из теоремы 2.

Необходимость. Пусть область g квадритуема и ее площадь равна P .

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу теоремы 1 найдется многоугольник, содержащийся в области g , площадь которого Q_ε больше $P - \frac{\varepsilon}{2}$, а также найдется многоугольник, содержащий область g , площадь которого Q'_ε меньше $P + \frac{\varepsilon}{2}$; при этом мы можем считать, что контуры K и K' этих многоугольников не имеют общих точек с контуром Γ области g .

Обозначим через ρ расстояние между контурами K и Γ , через ρ' — расстояние между K' и Γ (под расстоянием между двумя линиями мы понимаем нижнюю грань расстояний между точками, находящимися на разных линиях), а через δ — меньшее из чисел ρ и ρ' .

Если теперь мы разобьем фигуру D на квадритуемые части $\Delta\sigma_i$ так, что будет $d < \delta$, то, очевидно, каждая часть $\Delta\sigma_i$, имеющая с Γ хотя бы одну общую точку, будет находиться внутри контура K' и вне контура K . Поэтому при $d < \delta$ для площадей $\tilde{Q}$ и $\tilde{Q}'$ имеем:

$$P - \frac{\varepsilon}{2} < Q_\varepsilon \leq \tilde{Q} \leq \tilde{Q}' \leq Q'_\varepsilon < P + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$|\tilde{Q} - P| < \varepsilon \text{ и } |\tilde{Q}' - P| < \varepsilon,$$

если только $d < \delta$, а это означает, что

$$\lim_{d \rightarrow 0} \tilde{Q} = P \text{ и } \lim_{d \rightarrow 0} \tilde{Q}' = P.$$

Следствие. Пусть S — сумма площадей граничных $\Delta\sigma_i$. Если область g квадратуема, то

$$\lim_{d \rightarrow 0} S = 0.$$

§ 3. Определение двойного интеграла

Пусть в замкнутой квадратуемой области g дана функция $\tilde{f}(x, y)$.

Разобьем область g на n квадратуемых частей. Эти части, а также и их площади обозначим $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$. В каждой элементарной области $\Delta\sigma_k$ выберем произвольным образом точку (ξ_k, η_k) и составим сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k,$$

которую будем называть интегральной суммой.

Наибольший из диаметров элементарных областей $\Delta\sigma_k$ обозначим через d .

Определение 1. Число I называется пределом интегральной суммы $\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k$ при $d \rightarrow 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое δ , что будет верно неравенство

$$\left| I - \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k \right| < \varepsilon$$

при любом разбиении области g и любом выборе точек $(\xi_k, \eta_k) \in \Delta\sigma_k$, лишь бы было $d < \delta$.

Определение 2. Если существует конечный предел интегральной суммы, составленной для функции $f(x, y)$

в области g , то функция $f(x, y)$ называется интегрируемой в области g , а предел интегральной суммы называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области g и обозначается символом $\iint_g f(x, y) d\sigma$:

$$\iint_g f(x, y) d\sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k.$$

Из определения двойного интеграла следует, что для того чтобы функция $f(x, y)$ в области g была интегрируемой, необходимо, чтобы она в этой области была ограниченной.

В самом деле, если функция $f(x, y)$ в области g не ограничена, то при любом разбиении области g на части $\Delta\sigma_k$ ($k=1, 2, \dots, n$) найдется такая часть $\Delta\sigma_{k_0}$, в которой функция $f(x, y)$ также не ограничена. Поэтому, выбрав и зафиксировав точки $(\xi_k, \eta_k) \in \Delta\sigma_k$ для $k=1, 2, \dots, k_0-1, k_0+1, \dots, n$, мы можем выбрать в области $\Delta\sigma_{k_0}$ точку (ξ_{k_0}, η_{k_0}) так, чтобы абсолютная величина слагаемого $f(\xi_{k_0}, \eta_{k_0}) \Delta\sigma_{k_0}$ интегральной суммы, а вместе с ней и абсолютная величина всей интегральной суммы была больше наперед заданного положительного числа. А это означает, что интегральная сумма конечного предела не имеет.

З а м е ч а н и е. Если двойной интеграл $\iint_g f(x, y) d\sigma$ существует, то

$$\iint_g f(x, y) d\sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \sum^* f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k,$$

где сумма $\sum^*$ получается из интегральной суммы σ удалением всех или некоторых слагаемых, соответствующих тем $\Delta\sigma_k$, которые примыкают к границе области g .

В самом деле, представим интегральную сумму в виде

$$\sigma = \sum^* f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k + \tilde{\sum} f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k,$$

где $\tilde{\sum}$ охватывает только те члены суммы σ , которые соответствуют элементарным областям $\Delta\sigma_k$, примыкающим к границе области g .

Так как функция $f(x, y)$, интегрируемая в области g , ограничена в этой области:

$$|f(x, y)| \leq M,$$

то

$$\left| \sum \tilde{f}(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k \right| \leq M \sum \Delta\sigma_k.$$

Но область g — квадратуема (иначе не имело бы смысла говорить об интеграле от $f(x, y)$ в области g), и поэтому

$$\sum \Delta\sigma_k \rightarrow 0 \text{ при } d \rightarrow 0.$$

Следовательно, мы имеем:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum \tilde{f}(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k = 0$$

и

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum^* f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma = \int_g \int f(x, y) d\sigma.$$

§ 4. Свойства двойного интеграла

Отметим некоторые свойства двойного интеграла.

I. Если функция $f(x, y)$ интегрируема в области g , то интегрируема в этой области и функция $cf(x, y)$, где c — любая постоянная, причем

$$\int_g \int cf(x, y) d\sigma = c \int_g \int f(x, y) d\sigma. \quad (1)$$

II. Если функции $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ интегрируемы в области g , то интегрируемы в этой области и функции $f(x, y) + \varphi(x, y)$ и $f(x, y) - \varphi(x, y)$, причем

$$\begin{aligned} \int_g \int [f(x, y) \pm \varphi(x, y)] d\sigma &= \int_g \int f(x, y) d\sigma \pm \\ &\pm \int_g \int \varphi(x, y) d\sigma. \end{aligned} \quad (2)$$

Эти свойства непосредственно вытекают из определения двойного интеграла.

III. Пусть область g , в которой задана функция $f(x, y)$, кривою L разделена на части g_1 и g_2 . Тогда если существуют интегралы $I_1 = \int_{g_1} \int f(x, y) d\sigma$ и $I_2 = \int_{g_2} \int f(x, y) d\sigma$, то существует также интеграл

$$\int_g \int f(x, y) d\sigma$$

и

$$\int_g \int f(x, y) d\sigma = \int_{g_1} \int f(x, y) d\sigma + \int_{g_2} \int f(x, y) d\sigma. \quad (3)$$

Доказательство этого свойства двойного интеграла требует большего внимания.

Существование интегралов I_1 и I_2 предполагает, что области g_1 и g_2 , а значит, и область $g = g_1 + g_2$ — квадратуемые. Кроме того, из этого следует, что функция $f(x, y)$ ограничена как в g_1 , так и в g_2 , а значит, и во всей области g :

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &\leq M, \\ (x, y) &\in g. \end{aligned}$$

При любом разбиении области g на квадратуемые части $\Delta\sigma_k$ интегральная сумма σ для функции $f(x, y)$ в области g может быть представлена в виде

$$\sigma = \tilde{\sum} f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k + \sum_1 f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k + \sum_2 f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k,$$

где $\tilde{\sum}$ охватывает только те слагаемые суммы σ , которые соответствуют элементарным областям $\Delta\sigma_k$, содержащим точки линии L , а суммирования в $\sum_1$ и $\sum_2$ распространяются на $\Delta\sigma_k$, содержащиеся соответственно внутри g_1 и g_2 .

Так как

$$\left| \tilde{\sum} f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k \right| \leq M \tilde{\sum} \Delta\sigma_k$$

и $\tilde{\sum} \Delta\sigma_k \rightarrow 0$ при $d \rightarrow 0$, что следует из квадратуемости g_1 и g_2 , то

$$\lim_{d \rightarrow 0} \tilde{\sum} f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k = 0.$$

Кроме того, мы имеем:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_1 f(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k = I_1$$

и

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_2 f(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k = I_2;$$

это следует из существования интегралов I_1 и I_2 и замечания в конце предыдущего параграфа.

Следовательно, при $d \rightarrow 0$ сумма σ имеет предел и

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow 0} \sigma &= \int_g \int f(x, y) d\sigma = I_1 + I_2 = \int_{g_1} \int f(x, y) d\sigma + \\ &+ \int_{g_2} \int f(x, y) d\sigma. \end{aligned}$$

IV. Если в области g функция $f(x, y)$ интегрируема и $m \leq f(x, y) \leq M$, то на отрезке $[m, M]$ найдется такое число μ , что будет верно равенство

$$\frac{\int_g \int f(x, y) d\sigma}{g} = \mu, \quad (4)$$

где g в знаменателе означает площадь области g .

В самом деле, при любом разбиении области g на части $\Delta \sigma_k$ и при любом выборе точек $(\xi_k, \eta_k) \in \Delta \sigma_k$ мы имеем:

$$m \Delta \sigma_k \leq f(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k \leq M \Delta \sigma_k$$

и, суммируя для всех k ,

$$mg \leq \sum_k f(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k \leq Mg.$$

Переходя к пределу при $d \rightarrow 0$ и учитывая при этом, что функция $f(x, y)$ в области g интегрируема, мы получим:

$$mg \leq \int_g \int f(x, y) d\sigma \leq Mg.$$

Отсюда имеем:

$$m \leq \frac{1}{g} \int_g \int f(x, y) d\sigma \leq M.$$

Следовательно, обозначив число $\frac{1}{g} \int \int_g f(x, y) d\sigma$ через μ , мы получим равенство (4), причем будет $m \leq \mu \leq M$.

Доказанное здесь утверждение известно под названием теоремы о среднем.

Заметим, что если данная функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области g , то она в этой области имеет наименьшее и наибольшее значения, которые и можно взять в качестве m и M в теореме о среднем. Полагая затем область g связной, мы можем утверждать, что найдется такая точка $(\xi, \eta) \in g$, в которой значение функции $f(x, y)$ будет равно числу $\mu \in [m, M]$. Следовательно, при этих условиях мы будем иметь:

$$\frac{\int \int_g f(x, y) d\sigma}{g} = f(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in g. \quad (4')$$

Дальше будет доказано, что если функция $f(x, y)$ непрерывна в области g , то она в этой области интегрируема. Поэтому для всякой непрерывной функции теорема о среднем верна и в случае связной области выражается соотношением (4').

§ 5. Существование двойного интеграла

Выше было показано, что для интегрируемости функции $f(x, y)$ в области g необходимо, чтобы она в этой области была ограниченной. Однако можно показать, что ограниченность функции не является достаточным условием ее интегрируемости.

Как и в случае интегрирования функции одной переменной, здесь к интегрируемым функциям относятся прежде всего все непрерывные функции. Однако доказательство этого утверждения нельзя получить тем же способом, каким была доказана соответствующая теорема для функции одной переменной.

Здесь имеется дополнительная трудность, которая заключается в том, что при наложении двух разбиений области g на конечное число частей может получиться разбиение области g на бесконечное множество частей.

Пусть, например, внутри области g содержится начало координат и среди линий первого разбиения области g

имеется ось Ox , а среди линий второго разбиения есть линия, представляющая график непрерывной функции $\varphi(x)$, определенной формулами:

$$\varphi(x) = x \sin \frac{1}{x}, \text{ если } x \neq 0, \text{ и } \varphi(0) = 0.$$

В этом случае при совмещении двух указанных разбиений области g ось Ox пересечет график $\varphi(x)$ и в окрестности O получится бесконечное множество частей области g . Для такого третьего разбиения области g не имеет смысла говорить об интегральной сумме.

Доказательство теорем, выясняющих классы интегрируемых функций, мы будем основывать на следующих двух леммах.

Лемма 1. Если функция $f(x, y)$ в квадратуемой области g ограничена: $|f(x, y)| \leq M$ и область g можно разделить на конечное число квадратуемых частей $g_1, g_2, \dots, g_l$ так, что внутри каждой части g_k функция $f(x, y)$ будет постоянной, равной c_k ($k = 1, 2, \dots, l$), то функция $f(x, y)$ в области g интегрируема и

$$\iint_g f(x, y) d\sigma = \sum_{k=1}^l c_k \text{ пл. } g_k.$$

Доказательство. Разобьем область g на n квадратуемых частей $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$. Интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

для этого разбиения можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma = & \sum_{g_1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i + \sum_{g_2} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i + \dots + \\ & + \sum_{g_l} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i + \sum_{\tilde{g}} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i, \end{aligned}$$

где $\sum_{g_k} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ есть сумма тех слагаемых интегральной суммы σ , которые соответствуют $\Delta\sigma_i$, содержащимся

внутри g_k , а $\sum f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ охватывает слагаемые, соответствующие тем $\Delta\sigma_i$, которые содержат точки границ областей $g_1, g_2, \dots, g_l$.

Так как в области g_k имеем $f(x, y) = c_k$, то

$$\sum_{g_k} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = c_k \sum_{g_k} \Delta\sigma_i$$

и

$$\begin{aligned} \sigma &= c_1 \sum_{g_1} \Delta\sigma_i + c_2 \sum_{g_2} \Delta\sigma_i + \dots + c_l \sum_{g_l} \Delta\sigma_i + \\ &+ \sum f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i, \end{aligned}$$

причем

$$\left| \sum f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i \right| \leq M \sum \Delta\sigma_i.$$

Кроме того, в силу квадратируемости областей g_k мы имеем:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{g_k} \Delta\sigma_i = \text{пл. } g_k, \quad \lim_{d \rightarrow 0} \sum \Delta\sigma_i = 0,$$

где d — наибольший из диаметров элементарных частей $\Delta\sigma_i$ области g .

Следовательно, при $d \rightarrow 0$ существует предел интегральной суммы σ и

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sigma = \int \int_g f(x, y) d\sigma = c_1 \text{ пл. } g_1 + c_2 \text{ пл. } g_2 + \dots + c_l \text{ пл. } g_l,$$

что и требовалось доказать.

Наряду с интегральной суммой σ для ограниченной в области g функции $f(x, y)$ мы будем пользоваться также нижней суммой

$$s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta\sigma_i,$$

где m_i — нижняя грань функции $f(x, y)$ в области $\Delta\sigma_i$ (в силу ограниченности $f(x, y)$ в области g , а значит, и в каждой ее части $\Delta\sigma_i$ числа m_i существуют).

Если в области g

$$|f(x, y)| \leq M,$$

то, очевидно, при любом разбиении области g

$$s \leq M \text{ пл. } g;$$

поэтому множество нижних сумм s имеет верхнюю грань, которую обозначим через I и будем называть нижним интегралом функции $f(x, y)$ в области g .

Лемма 2. Нижняя сумма s при $d \rightarrow 0$ имеет предел, равный нижнему интегралу I .

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как I — верхняя грань нижних сумм s , то найдется такое разбиение области g на квадратируемые части $g_1, g_2, \dots, g_l$, что соответствующая нижняя сумма s' для функции $f(x, y)$ будет больше, чем $I - \varepsilon$:

$$s' = \sum_{i=1}^l m'_i \text{ пл. } g_i > I - \varepsilon$$

(m'_i — нижняя грань функции $f(x, y)$ в области g_i).

Введем в рассмотрение функцию $\varphi(x, y)$, которую определим так:

$\varphi(x, y) = m'_i$, если точка (x, y) содержится внутри g_i
($i = 1, 2, \dots, l$),

$\varphi(x, y) = -M$ на границах частичных областей g_i .

Очевидно, везде в области g

$$-M \leq \varphi(x, y) \leq f(x, y) \leq M.$$

По лемме 1, условиям которой функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет в области g , мы имеем:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sigma(\varphi) = \int \int_g \varphi(x, y) d\sigma = m'_1 \text{ пл. } g_1 + m'_2 \text{ пл. } g_2 + \dots + \\ + m'_l \text{ пл. } g_l = s' > I - \varepsilon.$$

Отсюда следует, что найдется такое $\delta > 0$, что при любом разбиении области g на квадратируемые части $\Delta\sigma_i$, удовлетворяющие условию $d < \delta$, будет верно

$$\sigma(\varphi) > s' - \varepsilon > I - 2\varepsilon.$$

Разобьем область g на квадратируемые части $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$, удовлетворяющие условию $d < \delta$. Обозначим через m_i нижнюю грань $f(x, y)$, а через μ_i — нижнюю грань $\varphi(x, y)$ в области $\Delta\sigma_i$ и составим нижние суммы $s(f)$ и $s(\varphi)$ для функций $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ при этом разбиении области g . Так как $\mu_i \leq m_i$, то

$$s(\varphi) = \sum_{i=1}^n \mu_i \Delta\sigma_i \leq \sum_{i=1}^n m_i \Delta\sigma_i = s(f).$$

Функция $\varphi(x, y)$ в $\Delta\sigma_i$ принимает конечное число значений и поэтому имеет наименьшее значение, равное μ_i . Следовательно, нижняя сумма $s(\varphi)$ есть в то же время интегральная сумма $\sigma(\varphi)$. Поэтому

$$s(\varphi) = \sigma(\varphi) > s' - \varepsilon > I - 2\varepsilon.$$

Но выше было установлено, что $s(\varphi) \leq s(f)$. Кроме того, $s(f) \leq I$. Поэтому

$$I - 2\varepsilon < s(f) \leq I,$$

если только $d < \delta$, а это означает, что

$$\lim_{d \rightarrow 0} s(f) = I,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1. Если функция $f(x, y)$ в замкнутой квадратируемой области g непрерывна, то она в этой области интегрируема.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы было верно

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{\text{пл. } g}.$$

для любых двух точек (x', y') и (x'', y'') области g , расстояние между которыми меньше δ . Такое δ можно найти, так как функция $f(x, y)$, непрерывная в замкнутой области g , равномерно непрерывна в этой области.

Разобьем область g на квадратируемые части $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$, удовлетворяющие только одному условию: $d < \delta$, и составим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

и нижнюю сумму

$$s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta \sigma_i.$$

Так как $f(x, y)$ непрерывна, то $m_i = f(\xi'_i, \eta'_i)$, где (ξ'_i, η'_i) — точка внутри или на границе $\Delta \sigma_i$.

Поэтому

$$s = \sum_{i=1}^n f(\xi'_i, \eta'_i) \Delta \sigma_i.$$

Очевидно, мы имеем:

$$\begin{aligned} 0 \leq \sigma - s &= \sum_{i=1}^n [f(\xi_i, \eta_i) - f(\xi'_i, \eta'_i)] \Delta \sigma_i < \frac{\epsilon}{\text{пл. } g} \sum_{i=1}^n \Delta \sigma_i = \\ &= \frac{\epsilon}{\text{пл. } g} \text{пл. } g = \epsilon. \end{aligned}$$

В силу произвольности $\epsilon > 0$ это означает, что

$$\lim_{d \rightarrow 0} [\sigma - s] = 0.$$

Кроме того, по лемме 2 для всякой ограниченной, а значит, и для непрерывной в замкнутой области g функции имеем:

$$\lim_{d \rightarrow 0} s = I.$$

Отсюда следует, что при $d \rightarrow 0$ интегральная сумма

$$\sigma = [\sigma - s] + s$$

имеет предел.

Этим доказано существование

$$\iint_g f(x, y) d\sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma$$

для любой непрерывной в замкнутой квадратуемой области g функции $f(x, y)$.

Теорема 2. Если функция $f(x, y)$ в квадратуемой области g ограничена: $|f(x, y)| \leq M$ и область g можно разбить на конечное число квадратуемых частей $g_1, g_2, \dots, g_l$ так, что внутри каждой частичной области g_k функция $f(x, y)$ будет непрерывной (а на границе может быть разрывной), то функция $f(x, y)$ в области g интегрируема.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$.

Для каждого k образуем квадратируемую область g'_k , содержащуюся вместе с границей строго внутри g_k , так, чтобы сумма всех g'_k отличалась от площади g меньше, чем на ε . Это возможно, так как все g_k — квадратируемы и их конечное число.

Функция $f(x, y)$ равномерно непрерывна в замкнутой области $g'_k \in g_k (k=1, 2, \dots, l)$. Поэтому найдется такое $\delta > 0$, что для любых двух точек (x', y') и (x'', y'') , принадлежащих одной и той же области g'_k , будет верно неравенство

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon,$$

если только расстояние между точками (x', y') и (x'', y'') будет меньше δ .

Разобьем область g на квадратируемые части $\Delta\sigma_i$, удовлетворяющие условию $d < \delta$, и составим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

и нижнюю сумму

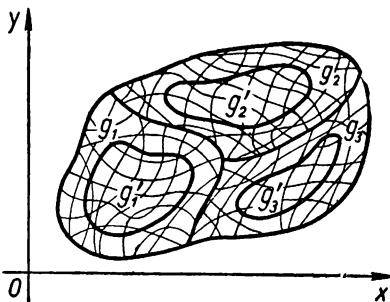
$$s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta\sigma_i.$$

Мы имеем:

$$0 \leq \sigma - s = \sum_{i=1}^n [f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i - m_i] \Delta\sigma_i.$$

Элементарные области $\Delta\sigma_i$ мы имеем трех видов: 1) содержащиеся в областях g'_k (для них $m_i = f(\xi'_i, \eta'_i)$, где $(\xi'_i, \eta'_i) \in \Delta\sigma_i$); 2) находящиеся вне областей g'_k и 3) налегающие на контуры областей g'_k (черт. 17). Соответственно этому сумму

$$\sum_{i=1}^n [f(\xi_i, \eta_i) - m_i] \Delta\sigma_i$$



Черт. 17

мы представим в виде суммы трех сумм:

$$\sum_1 [f(\xi_i, \eta_i) - f(\xi'_i, \eta'_i)] \Delta\sigma_i,$$

где суммирование распространяется на $\Delta\sigma_i$ первого вида,

$$\sum_2 [f(\xi_i, \eta_i) - m_i] \Delta\sigma_i,$$

где $\Delta\sigma_i$ — второго вида, и

$$\sum_3 [f(\xi_i, \eta_i) - m_i] \Delta\sigma_i,$$

где $\Delta\sigma_i$ — третьего вида.

Мы имеем:

$$|\sum_1 [f(\xi_i, \eta_i) - f(\xi'_i, \eta'_i)] \Delta\sigma_i| < \epsilon \cdot \text{пл. } g,$$

$$|\sum_2 [f(\xi_i, \eta_i) - m_i] \Delta\sigma_i| \leq 2M \sum_2 \Delta\sigma_i,$$

$$|\sum_3 [f(\xi_i, \eta_i) - m_i] \Delta\sigma_i| \leq 2M \sum_3 \Delta\sigma_i.$$

Но

$$\sum_2 \Delta\sigma_i < \epsilon$$

в силу выбора областей g'_k . Кроме того,

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_3 \Delta\sigma_i = 0$$

в силу квадратуемости областей g'_k , поэтому, взяв $\delta > 0$ достаточно малым, будет верно

$$\sum_3 \Delta\sigma_i < \epsilon.$$

Следовательно, $\delta > 0$ можно выбрать так, чтобы при $d < \delta$ было верно

$$0 \leq \sigma - s < \epsilon \cdot \text{пл. } g + 2M\epsilon + 2M\epsilon = (\text{пл. } g + 4M)\epsilon.$$

Это означает, что

$$\lim_{d \rightarrow 0} (\sigma - s) = 0.$$

Так как s при $d \rightarrow 0$ имеет предел (лемма 2), то отсюда следует, что существует

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sigma = \iint_g f(x, y) d\sigma,$$

что и требовалось доказать.

Еще раз вернемся к задачам § 1, которые привели нас к понятию двойного интеграла.

Из определения объема цилиндрического тела и определения двойного интеграла следует, что если в квадратуемой области g функция $f(x, y)$ непрерывна и положительна, то двойной интеграл $\iint_g f(x, y) d\sigma$, который су-

ществует в силу непрерывности $f(x, y)$ в области g , выражает объем v цилиндрического тела, ограниченного снизу плоской фигурой g на плоскости xOy , сверху — поверхностью $z=f(x, y)$ и с боков — цилиндрической поверхностью, у которой образующие параллельны оси Oz , а направляющей служит замкнутый контур, ограничивающий область g :

$$v = \int_g \int f(x, y) d\sigma.$$

Принятое в § 1 определение массы тонкой пластинки означает, что если данная пластинка представляет квадрируемую фигуру g и плотность пластинки есть $\mu(x, y)$, то масса пластинки равна:

$$M = \int_g \int \mu(x, y) d\sigma,$$

если, конечно, функция $\mu(x, y)$ интегрируема в области g .

§ 6. Вычисление двойного интеграла

В определении двойного интеграла содержится и способ его вычисления, но этот способ не годится для практики ввиду его трудности. Мы подробно рассмотрим несколько случаев и убедимся в том, что вычисление двойного интеграла приводится к двум последовательным простым интегрированиям.

Случай 1. Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема в области g , представляющей прямоугольник со сторонами $x=a$, $x=b$, $y=c$ и $y=d$ (черт. 18). Допустим, кроме того, что при любом $x \in [a, b]$ существует ин-

теграл $\varphi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$. Докажем, что в этом слу-

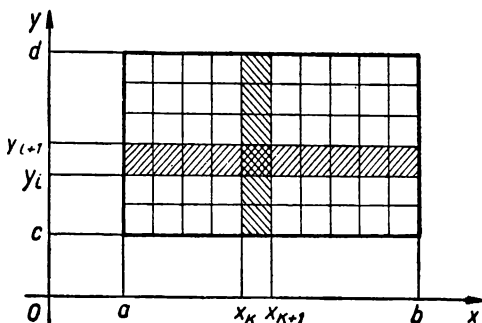
чае существует интеграл $\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$ и

$$\int_g \int f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

Доказательство. Двойной интеграл

$$I = \iint_g f(x, y) d\sigma,$$

который по условию существует, не зависит от способа разбиения области g на части при составлении интегральной суммы.



Черт. 18

Поэтому ради удобства область g мы разобьем на прямоугольные части. Для этого мы сначала разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_k < \dots < x_n = b$$

и через эти точки проведем прямые, параллельные оси Oy , а затем разобьем отрезок $[c, d]$ на m частей точками

$$y_0 = c < y_1 < y_2 < \dots < y_i < \dots < y_m = d$$

и через эти точки проведем прямые, параллельные оси Ox . В результате этого область g будет разбита на прямоугольники $\Delta\sigma_{kl}$ со сторонами $x = x_k$, $x = x_{k+1}$, $y = y_i$ и $y = y_{i+1}$ и с площадью $(x_{k+1} - x_k)(y_{i+1} - y_i) = \Delta x_k \Delta y_i$ ($k=0, 1, \dots, n-1$; $i=0, 1, \dots, m-1$), а интегральная сумма будет

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} f(\xi_{ki}, \eta_{ki}) \Delta x_k \Delta y_i,$$

где (ξ_{ki}, η_{ki}) — какая угодно точка прямоугольника $\Delta\sigma_{kl}$.

Так как интеграл I не зависит от выбора точек $(\xi_{ki}, \eta_{ki}) \in \Delta\sigma_{ki}$, то, ради удобства, в каждом прямоугольнике $\Delta\sigma_{ki}$ в качестве (ξ_{ki}, η_{ki}) мы возьмем точку (x_k, y_i) — левый нижний угол $\Delta\sigma_{ki}$.

Теперь интегральная сумма представится в виде

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} f(x_k, y_i) \Delta x_k \Delta y_i = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\Delta x_k \sum_{i=0}^{m-1} f(x_k, y_i) \Delta y_i \right].$$

Здесь мы сначала суммируем слагаемые, соответствующие прямоугольникам $\Delta\sigma_{k0}, \Delta\sigma_{k1}, \dots, \Delta\sigma_{km-1}$, которые вместе образуют вертикальную полоску между прямыми $x = x_k$ и $x = x_{k+1}$, затем мы суммируем суммы, соответствующие всем вертикальным полоскам области g , и тем самым получаем сумму всех членов интегральной суммы.

Далее, мы имеем:

$$I = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\Delta x_k \sum_{i=0}^{m-1} f(x_k, y_i) \Delta y_i \right], \quad (1)$$

где Δx есть наибольшее из всех Δx_k , а Δy — наибольшее из Δy_i .

Возьмем как угодно малое $\varepsilon > 0$. Из равенства (1) следует, что найдется такое $\delta > 0$, что при любом разбиении области g на прямоугольники $\Delta\sigma_{ki}$, удовлетворяющие условию $\Delta x < \delta$, $\Delta y < \delta$, будет верно

$$\left| I - \sum_{k=0}^{n-1} \left[\Delta x_k \sum_{i=0}^{m-1} f(x_k, y_i) \Delta y_i \right] \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

Зафиксируем разбиение отрезка $[a, b]$, удовлетворяющее условию $\Delta x < \delta$, и Δy будем стремить к нулю. Тогда

сумма $\sum_{i=0}^{m-1} f(x_k, y_i) \Delta y_i$ будет стремиться к интегралу

$$\int_c^d f(x_k, y) dy = \varphi(x_k),$$

который по условию существует, а неравенство (2) в пределе даст

$$\left| I - \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(x_k) \Delta x_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \quad (3)$$

Неравенство (3) верно, каково бы ни было разбиение отрезка $[a, b]$, лишь бы только оно удовлетворяло условию $\Delta x < \delta$. Так как $\epsilon > 0$ произвольно, то это означает, что

$$I = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(x_k) \Delta x_k = \int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx,$$

т. е. [что повторный интеграл $\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$ существует и

$$I = \iint_g f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx, \quad (4)$$

что и требовалось доказать.

Если при любом $y \in [c, d]$ существует интеграл $\psi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, то аналогичным путем можно доказать, что

существует повторный интеграл $\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$ и

$$I = \iint_g f(x, y) d\sigma = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy. \quad (5)$$

Следовательно, если существуют интегралы $\int_c^d f(x, y) dy$ и $\int_a^b f(x, y) dx$, как например в том случае, когда функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике g , то

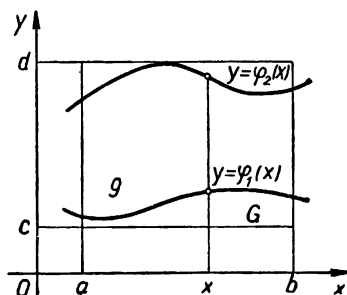
$$\iint_g f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (6)$$

Случай 2. Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема в области g , которая ограничена прямыми $x=a$, $x=b$ и непрерывными кривыми $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$, где $\varphi_2(x) \geq \varphi_1(x)$ для всех $x \in [a, b]$ (черт. 19). Допустим,

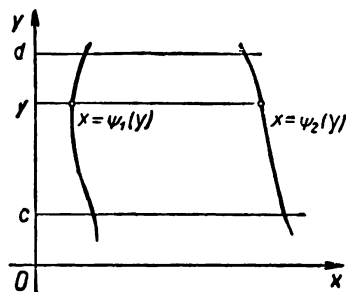
кроме того, что при любом $x \in [a, b]$ существует интеграл $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$. Докажем, что в этом случае существует интеграл $\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$ и

$$\iint_g f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

Доказательство. Заключим область g в прямоугольник G со сторонами $x=a$, $x=b$, $y=c$ и $y=d$, выбрав $c \leq \varphi_1(x)$, $d \geq \varphi_2(x)$ для всех $x \in [a, b]$.



Черт. 19



Черт. 20

В прямоугольнике G определим функцию $F(x, y)$, положив $F(x, y) = f(x, y)$ в точках (x, y) , принадлежащих области g , и $F(x, y) = 0$ в точках, не принадлежащих g .

Кривые $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ делят прямоугольник G на две квадратируемые части: g и $G - g$, в каждой из которых функция $F(x, y)$ интегрируема. Отсюда следует, что в прямоугольнике G функция $F(x, y)$ интегрируема, причем

$$\begin{aligned} \iint_G F(x, y) d\sigma &= \iint_g F(x, y) d\sigma + \iint_{G-g} F(x, y) d\sigma = \\ &= \iint_g f(x, y) d\sigma. \end{aligned} \quad (7)$$

Но для любого $x \in [a, b]$ мы имеем:

$$\int_c^d F(x, y) dy = \int_c^{\varphi_1(x)} F(x, y) dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F(x, y) dy + \\ + \int_{\varphi_2(x)}^d F(x, y) dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F(x, y) dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

Поэтому в силу доказанного в случае 1

$$\iint_G F(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d F(x, y) dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует, что

$$\iint_g f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (9)$$

Подобным же путем можно доказать, что если функция $f(x, y)$ интегрируема в области g , которая ограничена прямыми $y=c$, $y=d$ и непрерывными кривыми $x=\varphi_1(y)$ и $x=\varphi_2(y)$, где $\varphi_2(y) \geq \varphi_1(y)$ для всех $y \in [c, d]$ (черт. 20),

и при любом $y \in [c, d]$ существует интеграл $\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx$,

то существует интеграл $\int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx$ и

$$\iint_g f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (10)$$

Случай 3. Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема в области g , ограниченной таким замкнутым контуром Γ , который прямыми, параллельными осям координат, пересекается не более чем в двух точках (черт. 21).

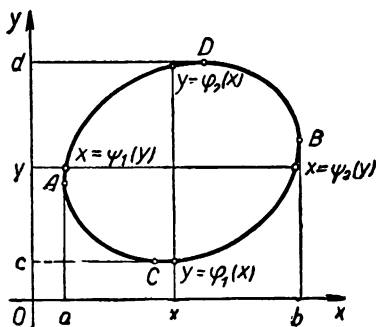
Пусть на контуре Γ самая левая точка есть A , а самая правая точка — B . Обозначим их абсциссы через a и b . Точки A и B делят контур Γ на нижнюю часть ACB и верхнюю часть ADB . Пусть $y=\varphi_1(x)$ есть уравнение ACB , а $y=\varphi_2(x)$ — уравнение ADB . Тогда для вычисления двойного интеграла

$\iint_g f(x, y) d\sigma$ применима формула (9), если для всех

$x \in [a, b]$ существует интеграл $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$.

Пусть на контуре Γ самая нижняя точка есть C , а самая верхняя точка — D . Обозначим их ординаты через c и d .

Точки C и D делят контур Γ на левую часть CAD и на правую часть CBD . Пусть $x = \psi_1(y)$ есть уравнение CAD , а $x = \psi_2(y)$ — уравнение CBD . Тогда для вычисления $\iint_g f(x, y) d\sigma$ применима формула (10), если для всех $y \in [c, d]$ существует



Черт. 21

интеграл $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$.

Следовательно, если в данном случае существуют интегралы $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$ и $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$, что будет, например, тогда, когда функция $f(x, y)$ непрерывна в области g , то

$$\iint_g f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (11)$$

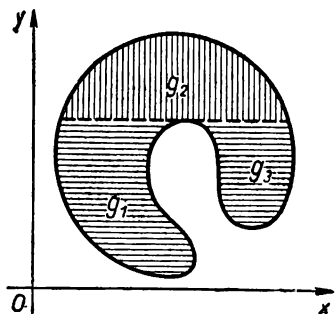
Наконец, если область интегрирования функции $f(x, y)$ будет более сложного вида, чем рассмотренная выше, то эту область следует разбить на такие части, по которым функция $f(x, y)$ может быть проинтегрирована при помощи полученных выше формул, а затем воспользоваться аддитивностью двойного интеграла по отношению к области интегрирования.

Так, например, для вычисления $\iint_g f(x, y) d\sigma$ в случае области g , изображенной на чертеже 22, достаточно область g разбить на три части g_1 , g_2 и g_3 (это показано

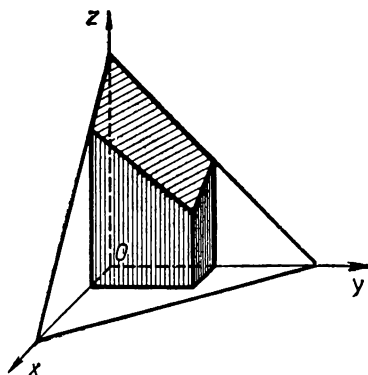
пунктиром), вычислить $\iint_{g_2} f(x, y) d\sigma$ по формуле (9). а интегралы $\iint_{g_1} f(x, y) d\sigma$ и $\iint_{g_3} f(x, y) d\sigma$ — по формуле (10) и полученные результаты сложить:

$$\iint_g f(x, y) d\sigma = \iint_{g_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{g_2} f(x, y) d\sigma + \iint_{g_3} f(x, y) d\sigma.$$

Таким образом, как в случае прямоугольной области интегрирования, так и в случае более сложных областей



Черт. 22



Черт. 23

вычисление двойного интеграла мы приводим к двум последовательным простым интегрированиям. Имея это в виду, в дальнейшем двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по любой области g мы будем выражать символом

$$\iint_g f(x, y) dx dy.$$

Пример 1. Вычислить объем бруска, ограниченного координатными плоскостями и плоскостями $x=1$, $y=2$ и $x+y+z=4$ (черт. 23).

Решение. Данный брусок представляет цилиндрическое тело, ограниченное снизу прямоугольником g со

сторонами $x=0$, $y=0$, $x=1$ и $y=2$, а сверху — плоскостью $z=4-x-y$. Поэтому в силу геометрического смысла двойного интеграла искомый объем равен:

$$v = \int\int_g (4-x-y) dx dy.$$

Двойной интеграл, выражающий v , вычислим путем двух последовательных интегрирований. Так как здесь область интегрирования — прямоугольник, то пользуемся формулой (6):

$$\begin{aligned} \int\int_g (4-x-y) dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^2 (4-x-y) dy = \\ &= \int_0^1 \left(4y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^2 dx = \int_0^1 (6-2x) dx = (6x - x^2) \Big|_0^1 = 5. \end{aligned}$$

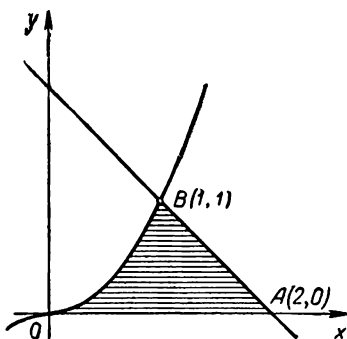
Следовательно,

$$v = 5 \text{ (куб. ед.)}.$$

Пример 2. Вычислить массу M тонкой пластинки, представляющей криволинейный треугольник OAB , ограниченный осью Ox , кубической параболой $y=x^3$ и прямой $x+y=2$ (черт. 24), если плотность выражается формулой $\mu = x^2 y$.

Решение. Обозначая криволинейный треугольник OAB через g , имеем:

$$M = \int\int_g x^2 y dx dy.$$



Черт. 24

Двойной интеграл вычисляем путем двух последовательных интегрирований по формуле (10): первый раз интегрируем по x в пределах от x , выраженного через y из уравнения левой части контура области g (из уравнения кубической параболы), до x , выраженного через y из уравнения правой части контура (прямой $x+y=2$); полученный при этом результат инте-

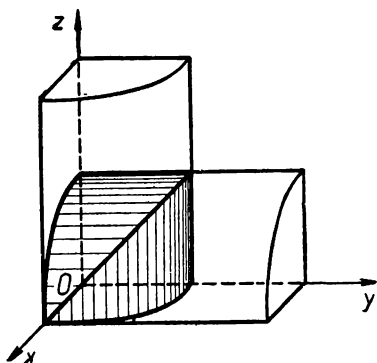
грируем по y от наименьшего значения $y=0$ до наибольшего значения $y=1$ в области g . Таким образом,

$$\begin{aligned}\iint_g x^2 y dx dy &= \int_0^1 y dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{2-y} x^2 dx = \int_0^1 y \frac{x^3}{3} \bigg|_{\sqrt[3]{y}}^{2-y} dy = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 y [(2-y)^3 - y] dy = \frac{1}{3} \int_0^1 (8y - 13y^2 + 6y^3 - y^4) dy = \\ &= \frac{1}{3} \left(4y^2 - \frac{13}{3} y^3 + \frac{3}{2} y^4 - \frac{1}{5} y^5 \right) \bigg|_0^1 = \frac{29}{90}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$M = \frac{29}{90}.$$

Если бы мы в этом примере при вычислении двойного интеграла решили сначала интегрировать по y , а затем



Черт. 25

по x (формула (9)), то контур области g пришлось бы разбить на нижнюю и верхнюю части. Но верхняя часть состоит из двух кусков — дуги кубической параболы OB и отрезка прямой AB , которые выражаются разными уравнениями; поэтому в области g для интеграла по y мы не имели бы общего верхнего предела, вследствие чего пришлось бы область g разбить на две части прямой $x=1$

и двойной интеграл представить в виде суммы двух двойных интегралов, что усложнило бы решение задачи.

Пример 3. Оси двух круговых цилиндров с одинаковым поперечным сечением пересекаются под прямым углом. Вычислить объем общей части этих цилиндров.

Решение. Пусть радиус поперечного сечения данных цилиндров равен r . Тогда, выбрав прямоугольную систему координат надлежащим образом, данные цилиндры можно задать уравнениями

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{и} \quad x^2 + z^2 = r^2.$$

На чертеже 25 изображена одна восьмая часть тела, объем v которого надо вычислить. Эта часть представляет цилиндрическое тело, ограниченное снизу первой четвертью круга $x^2 + y^2 = r^2$, которую обозначим g , а сверху — поверхностью $z = \sqrt{r^2 - x^2}$, представляющей верхнюю часть цилиндра $x^2 + z^2 = r^2$.

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} v &= \iint_g \sqrt{r^2 - x^2} dx dy = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} dy = \\ &= \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^r = \frac{2}{3} r^3. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$v = \frac{16}{3} r^3.$$

§ 7. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть требуется вычислить двойной интеграл от непрерывной функции $f(x, y)$ по квадратируемой области g .

Пусть формулы

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v) \quad (1)$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками $M(x, y)$ области g в плоскости xOy и точками $M'(u, v)$ некоторой области g' в плоскости uOv .

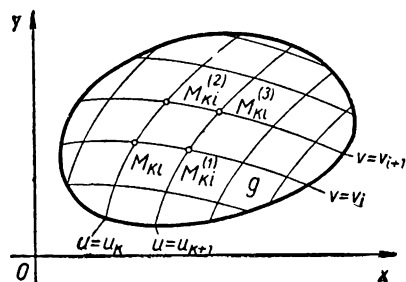
Таким образом, по формулам (1) область g' на координатной плоскости uOv преобразуется в область g на плоскости xOy , а по формулам

$$u = \varphi_1(x, y), \quad v = \psi_1(x, y), \quad (1')$$

которые получаются из формул (1), если их разрешить относительно u и v , область g в плоскости xOy преобразуется в область g' на плоскости uOv .

Так как по координатам точки $M'(u, v)$ можно определить не только положение самой точки $M'(u, v)$ в области g' , но и положение точки $M(x, y) \in g$, находящейся с точкой $M'(u, v)$ во взаимном соответствии, то координаты u и v точки M' мы можем рассматривать как некоторые координаты точки M .

Сеть координатных линий в прямоугольной системе координат xOy состоит из семейства прямых $x = \text{const}$ и семейства прямых $y = \text{const}$. Если положить в уравнениях (1) $u = \text{const}$, то система уравнений (1) будет параметрическим выражением линии, вдоль которой изменяется только v , а при $v = \text{const}$ система уравнений (1) выражает в параметрической форме линию, вдоль которой изменяется только u . Линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ при различных значениях const образуют два семейства координатных линий, которые в общем случае представляют



Черт. 26

кривые. Поэтому u и v принято называть криволинейными координатами точки M .

В силу того, что между точками области g , с одной стороны, и точками области g' , с другой стороны, существует взаимно однозначное соответствие, через каждую точку $M(x, y)$ области g прой-

дет одна координатная линия $u = \text{const}$ и одна координатная линия $v = \text{const}$, и положение точки M определится пересечением этих двух линий. Формулы (1) и вытекающие из них (1') являются формулами преобразования координат, позволяющими по прямоугольным координатам x и y точки M найти криволинейные координаты u и v этой точки M , и обратно.

Двойной интеграл $\iint_g f(x, y) dx dy$ не зависит от способа разбиения области g ; поэтому при составлении интегральной суммы мы разобьем область g на части линиями $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ (черт. 26).

Так как двойной интеграл можно рассматривать как предел суммы только тех слагаемых интегральной суммы, которые соответствуют внутренним клеткам деления области g , то

$$\iint_g f(x, y) dx dy = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k, i} f(M_{ki}) \Delta \sigma_{ki}, \quad (2)$$

где $\Delta\sigma_{ki}$ — площадь криволинейного параллелограмма M_{ki} , $M_{ki}^{(1)}$, $M_{ki}^{(2)}$, $M_{ki}^{(3)}$, ограниченного линиями $u = u_k$, $v = v_i$, $u = u_{k+1}$, $v = v_{i+1}$, а значение функции взято в точке $M_{ki} \in \Delta\sigma_{ki}$ для удобства, имея в виду, что от выбора точек в элементарных областях $\Delta\sigma_{ki}$ двойной интеграл не зависит.

Декартовы координаты вершин $\Delta\sigma_{ki}$ обозначим следующим образом:

$$M_{ki}(x_{ki}, y_{ki}), M_{ki}^{(1)}(x_{ki}^{(1)}, y_{ki}^{(1)}), \\ M_{ki}^{(2)}(x_{ki}^{(2)}, y_{ki}^{(2)}), M_{ki}^{(3)}(x_{ki}^{(3)}, y_{ki}^{(3)}).$$

По формулам (1) имеем:

$$x_{ki} = \varphi(u_k, v_i), \quad y_{ki} = \psi(u_k, v_i), \\ x_{ki}^{(1)} = \varphi(u_{k+1}, v_i), \quad y_{ki}^{(1)} = \psi(u_{k+1}, v_i), \\ x_{ki}^{(2)} = \varphi(u_k, v_{i+1}), \quad y_{ki}^{(2)} = \psi(u_k, v_{i+1}), \\ x_{ki}^{(3)} = \varphi(u_{k+1}, v_{i+1}), \quad y_{ki}^{(3)} = \psi(u_{k+1}, v_{i+1}).$$

Пусть функции $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ в области g' имеют непрерывные частные производные второго порядка. Тогда, обозначая

$$\Delta u_k = u_{k+1} - u_k \text{ и } \Delta v_i = v_{i+1} - v_i$$

и пользуясь формулой Тейлора, получим:

$$\begin{aligned} \varphi(u_{k+1}, v_i) &= \varphi(u_k, v_i) + \varphi'_u(u_k, v_i) \Delta u_k + R_{2, \varphi}^{(1)}, \\ \psi(u_{k+1}, v_i) &= \psi(u_k, v_i) + \psi'_u(u_k, v_i) \Delta u_k + R_{2, \psi}^{(1)}, \\ \varphi(u_k, v_{i+1}) &= \varphi(u_k, v_i) + \varphi'_v(u_k, v_i) \Delta v_i + R_{2, \varphi}^{(2)}, \\ \psi(u_k, v_{i+1}) &= \psi(u_k, v_i) + \psi'_v(u_k, v_i) \Delta v_i + R_{2, \psi}^{(2)}, \\ \varphi(u_{k+1}, v_{i+1}) &= \varphi(u_k, v_i) + \varphi'_u(u_k, v_i) \Delta u_k + \varphi'_v(u_k, v_i) \Delta v_i + R_{2, \varphi}^{(3)}, \\ \psi(u_{k+1}, v_{i+1}) &= \psi(u_k, v_i) + \psi'_u(u_k, v_i) \Delta u_k + \psi'_v(u_k, v_i) \Delta v_i + R_{2, \psi}^{(3)}. \end{aligned}$$

Так как те слагаемые в интегральной сумме, которые представляют бесконечно малые высшего порядка по отношению к Δu_k и Δv_i , не влияют на величину предела интегральной суммы, в выражениях координат вершин $\Delta\sigma_{ki}$ мы отбросим остаточные члены и криволинейный параллелограмм $\Delta\sigma_{ki}$ примем за обыкновенный параллелограмм с вершинами:

$$M_{ki}[\varphi(u_k, v_i), \psi(u_k, v_i)], \\ M_{ki}^{(1)}[\varphi(u_k, v_i) + \varphi'_u(u_k, v_i) \Delta u_k, \psi(u_k, v_i) + \psi'_u(u_k, v_i) \Delta u_k], \\ M_{ki}^{(2)}[\varphi(u_k, v_i) + \varphi'_v(u_k, v_i) \Delta v_i, \psi(u_k, v_i) + \psi'_v(u_k, v_i) \Delta v_i], \\ M_{ki}^{(3)}[\varphi(u_k, v_i) + \varphi'_u(u_k, v_i) \Delta u_k + \varphi'_v(u_k, v_i) \Delta v_i, \\ \psi(u_k, v_i) + \psi'_u(u_k, v_i) \Delta u_k + \psi'_v(u_k, v_i) \Delta v_i].$$

(Нетрудно убедиться проверкой, что расстояние между M_{ki} и $M_{ki}^{(1)}$ равно расстоянию между $M_{ki}^{(2)}$ и $M_{ki}^{(3)}$, а расстояние между M_{ki} и $M_{ki}^{(2)}$ равно расстоянию между $M_{ki}^{(1)}$ и $M_{ki}^{(3)}$, поэтому прямолинейная фигура $M_{ki} M_{ki}^{(1)} M_{ki}^{(2)} M_{ki}^{(3)}$ есть действительно параллелограмм.)

Площадь параллелограмма $M_{ki} M_{ki}^{(1)} M_{ki}^{(2)} M_{ki}^{(3)}$ равняется удвоенной площади треугольника $M_{ki} M_{ki}^{(1)} M_{ki}^{(2)}$. А по известной формуле аналитической геометрии 2 пл. $\triangle M_{ki} M_{ki}^{(1)} M_{ki}^{(2)}$ равняется абсолютной величине определителя:

$$\begin{vmatrix} x_{ki} & y_{ki} & 1 \\ x_{ki}^{(1)} & y_{ki}^{(1)} & 1 \\ x_{ki}^{(2)} & y_{ki}^{(2)} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{ki}^{(1)} - x_{ki} & y_{ki}^{(1)} - y_{ki} \\ x_{ki}^{(2)} - x_{ki} & y_{ki}^{(2)} - y_{ki} \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} \varphi'_u(u_k, v_i) \Delta u_k & \psi'_u(u_k, v_i) \Delta u_k \\ \varphi'_v(u_k, v_i) \Delta v_i & \psi'_v(u_k, v_i) \Delta v_i \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} \varphi'_u(u_k, v_i) & \psi'_u(u_k, v_i) \\ \varphi'_v(u_k, v_i) & \psi'_v(u_k, v_i) \end{vmatrix} \Delta u_k \Delta v_i.$$

Следовательно, обозначая

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \varphi'_u(u, v) & \psi'_u(u, v) \\ \varphi'_v(u, v) & \psi'_v(u, v) \end{vmatrix}, \quad (3)$$

мы имеем:

$$\text{пл. } M_{ki} M_{ki}^{(1)} M_{ki}^{(2)} M_{ki}^{(3)} = |J(u, v)| \Delta u_k \Delta v_i,$$

что и подставим в равенство (2) вместо $\Delta \sigma_{ki}$. В результате получим:

$$\begin{aligned} \int_g \int_g f(x, y) dx dy = \\ = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k, i} f[\varphi(u_k, v_i), \psi(u_k, v_i)] |J(u_k, v_i)| \Delta u_k \Delta v_i = \\ = \int_g \int_g f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] |J(u, v)| du dv. \end{aligned}$$

Итак, замена переменных под знаком двойного интеграла при помощи соотношений (1) выполняется по формуле:

$$\int_g \int_g f(x, y) dx dy = \int_g \int_g f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] |J| du dv, \quad (4)$$

где $|J|$ — абсолютная величина определителя (3), который является определителем Остроградского для системы (1). Определитель (3) называют также якобианом.

Если u и v рассматривать не как криволинейные координаты на плоскости xOy , а как новые прямоугольные координаты, то формула (4) примет вид:

$$\int_g \int f(x, y) dx dy = \int_{g'} \int f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] |J| du dv. \quad (4')$$

Таким образом, в формуле (4) область интегрирования g остается без изменения, но при помощи уравнений (1) вместо прямоугольных координат x и y вводятся на плоскости xOy криволинейные координаты u и v . В формуле (4') новые координаты u и v остаются прямоугольными, как и первоначальные координаты x и y , но деформируется область интегрирования: из области g на плоскости xOy превращается при помощи соотношений (1) в область g' на плоскости uOv *).

§ 8. Двойной интеграл в полярных координатах

Часто вычисление двойного интеграла упрощается заменой прямоугольных координат x и y полярными координатами ρ и θ по известным формулам:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

В этом случае

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho.$$

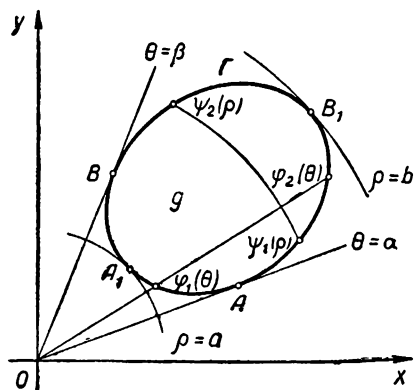
Поэтому, учитывая, что $|J| = |\rho| = \rho$, имеем:

$$\int_g \int f(x, y) dx dy = \int_g \int f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta. \quad (1)$$

*) Рассмотренное здесь доказательство формулы (4) является вполне убедительным и обладает геометрической наглядностью. Однако оно не обладает формальной строгостью. Строгое доказательство читатель найдет в подробных учебниках, например в книге Г. М. Фихтенгольца „Курс дифференциального и интегрального исчисления“, т. III.

Остановимся еще на вопросе о том, как найти границы интегралов при вычислении двойного интеграла в правой части (1) путем двух последовательных простых интегрирований.

Пусть область интегрирования g находится между прямыми $\theta = \alpha$ и $\theta = \beta$ и между окружностями $\rho = a$ и $\rho = b$, которые имеют общие точки с областью интегрирования только на контуре Γ , ограничивающем область g (черт. 27).



Черт. 27

Крайние лучи $\theta = \alpha$ и $\theta = \beta$, исходящие из начала, прикасаясь к контуру Γ , делят его на две части, из которых одна — AA_1B — расположена ближе к началу, а другая — AB_1B — дальше от начала.

Пусть уравнение AA_1B есть $\rho = \varphi_1(\theta)$, а уравнение AB_1B — $\rho = \varphi_2(\theta)$. Пусть мы решили сначала взять ин-

теграл по ρ , считая θ постоянной, а затем результат проинтегрировать по θ . Так как в области g крайними значениями θ являются α и β и при любом фиксированном θ из отрезка $[\alpha, \beta]$ ρ изменяется от $\varphi_1(\theta)$ до $\varphi_2(\theta)$, то имеем:

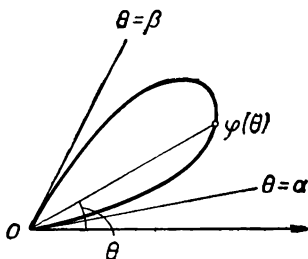
$$\begin{aligned} \iint_g f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\rho \, d\theta &= \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\rho. \end{aligned} \quad (2)$$

Крайние окружности $\rho = a$ и $\rho = b$, прикасаясь к контуру Γ , также делят его на две части. Одна часть — A_1AB_1 — примыкает к прямой $\theta = \alpha$, а другая — A_1BB_1 — к прямой $\theta = \beta$. Пусть $\theta = \psi_1(\rho)$ и $\theta = \psi_2(\rho)$ есть уравнения A_1AB_1 и A_1BB_1 . Так как в области g крайними значениями ρ являются a и b и при любом фиксированном ρ из отрезка

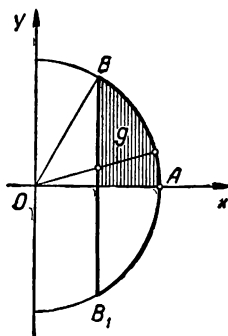
$[a, b]$ θ изменяется от $\psi_1(\rho)$ до $\psi_2(\rho)$, то имеем:

$$\begin{aligned} & \iint_g f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \\ &= \int_a^b \rho d\rho \int_{\psi_1(\rho)}^{\psi_2(\rho)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (3)$$

Заметим, наконец, что если начало координат находится внутри или на границе области интегрирования g , то при интегрировании в порядке сначала по ρ , а затем по θ (формула (2)), нижний предел для первого интеграла (по ρ) будет равен 0.



Черт. 28



Черт. 29

Так, например, для случая, изображенного на чертеже 28, где область g ограничена замкнутой кривой $\rho = \varphi(\theta)$ и содержится между лучами $\theta = \alpha$ и $\theta = \beta$, имеем:

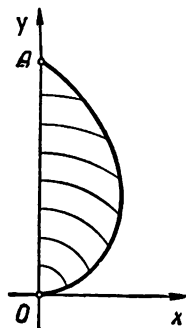
$$\begin{aligned} & \iint_g f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \end{aligned} \quad (4)$$

Пример 1. Вычислить массу тонкой пластинки, представляющей фигуру, ограниченную слева прямой $\rho \cos \theta = 1$, а справа — окружностью $\rho = 2$ (черт. 29), если плотность в каждой точке равна абсциссе этой точки.

Решение. Если верхнюю половину пластинки обозначить через g , то искомая масса будет равна:

$$M = 2 \iint_g x \, dx \, dy.$$

Так как границы пластинки даны уравнениями в полярных координатах, то двойной интеграл, выражающий массу M , будем вычислять в полярных координатах:



Черт. 30

$$\iint_g x \, dx \, dy = \iint_g \rho^2 \cos \theta \, d\rho \, d\theta.$$

В области g крайними значениями θ являются: 0 в точке A и в других точках g на оси Ox и $\frac{\pi}{3}$ в точке B , что находим из системы уравнений $\rho \cos \theta = 1$, $\rho = 2$. При любом θ из отрезка $[0, \frac{\pi}{3}]$ в области g ρ изменяется от $\rho = \frac{1}{\cos \theta}$ до $\rho = 2$. Поэтому по формуле (2) имеем:

$$\begin{aligned} \iint_g \rho^2 \cos \theta \, d\rho \, d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos \theta \, d\theta \int_{\frac{1}{\cos \theta}}^2 \rho^2 \, d\rho = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(8 \cos \theta - \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) d\theta = \frac{8}{3} \sin \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{3} \operatorname{tg} \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$M = 2\sqrt{3}.$$

Пример 2. Вычислить массу однородной тонкой пластинки g , ограниченной спиралью $\rho = 2\theta$ и прямой $\theta = \frac{\pi}{2}$ (черт. 30).

Решение. Так как пластинка однородна, то плотность ее постоянна. Пусть она равна числу μ . Тогда масса данной пластинки равна:

$$M = \iint_g \mu \, dx \, dy = \mu \iint_g \rho \, d\rho \, d\theta.$$

Здесь двойной интеграл, выражающий M , вычисляется просто при любом порядке интегрирования. Поэтому в отличие от предыдущего примера первое интегрирование выполним по θ , а затем результат проинтегрируем по ρ (формула (3)). Так как крайние значения ρ в области g равны 0, в начале координат, и π в точке A , а при любом ρ из отрезка $[0, \pi]$ в области g величина θ изменяется от $\theta = \frac{1}{2}\rho$ на дуге $\widetilde{OA}$ спирали до $\theta = \frac{\pi}{2}$ на отрезке OA оси Oy , то

$$\begin{aligned} \iint_g \rho \, d\rho \, d\theta &= \int_0^{\pi} \rho \, d\rho \int_{\frac{1}{2}\rho}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \rho (\pi - \rho) \, d\rho = \left(\frac{\pi}{4} \rho^2 - \frac{1}{6} \rho^3 \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{12} \pi^3. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$M = \frac{\mu}{12} \pi^3.$$

§ 9. Тройной интеграл

Подобно тому как в случае плоскости были введены понятия квадратуемой фигуры и площади фигуры, в трехмерном пространстве вводятся понятия кубуемой области и объема трехмерной области (объема тела).

Далее, распространив понятие интеграла на случай функции трех переменных в трехмерной области, приходим к понятию тройного интеграла. Здесь все делается так же, как и при определении понятия двойного интеграла.

Пусть функция $f(x, y, z)$ задана в замкнутой кубуемой области v . Разобьем v на n кубуемых частей. Обозначим эти части и их объемы через $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$. В каждой частичной области Δv_k выберем произвольным образом точку (ξ_k, η_k, ζ_k) и составим интегральную сумму:

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k.$$

Пусть d — наибольший из диаметров элементарных областей Δv_k .

Если при $d \rightarrow 0$ интегральная сумма σ стремится к конечному пределу, не зависящему ни от способа разбиения области v на части Δv_k , ни от выбора точек $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \Delta v_k$, то этот предел называется тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области v и обозначается символом $\iiint_v f(x, y, z) dv$, а функция

$f(x, y, z)$ в области v называется интегрируемой.

Таким образом, по определению имеем:

$$\iiint_v f(x, y, z) dv = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k.$$

Если область v принять за материальное тело, а $f(x, y, z)$ за плотность этого тела, которая в общем случае является функцией от точки (x, y, z) , то, очевидно, интегральная сумма σ есть приближенное значение массы тела v . Поэтому массу тела с плотностью $\mu = f(x, y, z)$ естественно считать равной

$$M = \iiint_v f(x, y, z) dv.$$

Аналогично теоремам § 5 формулируются и доказываются теоремы существования тройного интеграла. В частности, верна

Теорема. Если функция $f(x, y, z)$ в замкнутой кубической области v непрерывна, то она интегрируема в этой области, т. е. тройной интеграл $\iiint_v f(x, y, z) dv$ существует.

Свойства тройного интеграла аналогичны свойствам двойного интеграла. Мы на них останавливаться не будем. Заметим только, что в случае тройного интеграла от непрерывной функции в связной области теорема о среднем значении выражается равенством:

$$\frac{\iiint_v f(x, y, z) dv}{v} = f(\xi, \eta, \zeta),$$

где v в знаменателе означает объем области v , а (ξ, η, ζ) есть некоторая точка области v .

Так же, как вычисление двойного интеграла было приведено к двум последовательным простым интегрированиям, вычисление тройного интеграла приводится к трем последовательным простым интегрированиям.

В самом деле, пусть область v есть параллелепипед $a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2, a_3 \leq z \leq b_3$.

Разобьем ее плоскостями $x = x_k, y = y_i, z = z_j$ на элементарные параллелепипеды $x_k \leq x \leq x_{k+1}, y_i \leq y \leq y_{i+1}, z_j \leq z \leq z_{j+1}$ с объемом $\Delta x_k \Delta y_i \Delta z_j$.

Если функция $f(x, y, z)$ интегрируема в данной области v , то мы имеем:

$$\begin{aligned} & \iiint_v f(x, y, z) dv = \\ &= \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \sum_k \sum_i \sum_j f(x_k, y_i, z_j) \Delta x_k \Delta y_i \Delta z_j = \\ &= \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \sum_k \sum_i \left[\Delta x_k \Delta y_i \sum_j f(x_k, y_i, z_j) \Delta z_j \right]. \end{aligned}$$

Теперь, если при любых $x \in [a_1, b_1]$ и $y \in [a_2, b_2]$ существует интеграл

$$\Phi(x, y) = \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz,$$

мы можем доказать, что

$$\begin{aligned} \iiint_v f(x, y, z) dv &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum_k \sum_i \Phi(x_k, y_i) \Delta x_k \Delta y_i = \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} dx dy \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

Для этого достаточно провести рассуждения, аналогичные рассуждениям в случае вычисления двойного интеграла по прямоугольной области интегрирования.

Если существуют также и интегралы

$$\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dy \quad \text{для} \quad x \in [a_1, b_1], z \in [a_3, b_3]$$

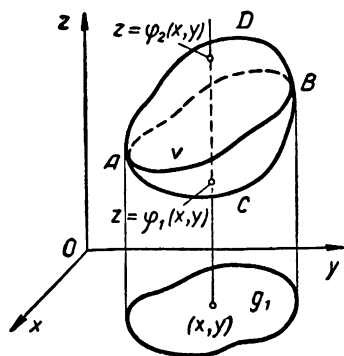
и

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x, y, z) dx \quad \text{для} \quad y \in [a_2, b_2], z \in [a_3, b_3],$$

то

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) dv = \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} dx dy \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_3}^{b_3} dx dz \int_{a_2}^{b_2} f(x, y, z) dy = \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} dy dz \int_{a_1}^{b_1} f(x, y, z) dx. \end{aligned}$$

Рассмотрим область v произвольной формы, в которой функция $f(x, y, z)$ интегрируема (черт. 31). Проекцию



Черт. 31

области v на плоскость xOy обозначим через g_1 . Допустим, что прямые, параллельные оси Oz , пересекают границу области v не более чем в двух точках.

Тогда на поверхности, ограничивающей область v , можно выделить нижнюю часть и верхнюю часть (на чертеже нижняя часть есть ACB , а верхняя часть — ADB). Пусть уравнение нижней части есть $z = \varphi_1(x, y)$, а верхней части — $z = \varphi_2(x, y)$.

Если для любой точки $(x, y) \in g_1$ существует интеграл

$$\Phi_1(x, y) = \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz,$$

то можно доказать, что

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \iint_{g_1} dx dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Для этого достаточно провести рассуждения по существу такие же, как и в случае вычисления двойного интеграла по области, ограниченной криволинейным контуром (§ 6, случай 2).

Пусть $y = \psi_1(x, z)$ есть уравнение левой части, а $y = \psi_2(x, z)$ — уравнение правой части поверхности, ограничивающей область v . Если существует интеграл

$$\Phi_2(x, z) = \int_{\psi_1(x, z)}^{\psi_2(x, z)} f(x, y, z) dy$$

для всех $(x, z) \in g_2$, где g_2 — проекция v на плоскость xOz , то мы будем иметь:

$$\iiint_v f(x, y, z) dv = \iint_{g_2} dx dz \int_{\psi_1(x, z)}^{\psi_2(x, z)} f(x, y, z) dy.$$

При соответствующих условиях аналогичным образом мы получим:

$$\iiint_v f(x, y, z) dv = \iint_{g_3} dy dz \int_{\chi_1(y, z)}^{\chi_2(y, z)} f(x, y, z) dx,$$

если $x = \chi_2(y, z)$ есть уравнение той части границы области v , которая обращена в сторону положительного направления оси Ox , $x = \chi_1(y, z)$ — уравнение противоположной части границы v , а g_3 — проекция области v на плоскость yOz .

В тех случаях, когда область интегрирования более сложная, стараются разделить ее на такие части, по которым интегрирование может быть выполнено при помощи полученных выше формул, а затем пользуются аддитивностью тройного интеграла.

Итак, во всех случаях при вычислении тройного интеграла берется сначала простой интеграл, а затем — двойной интеграл от результата первого интегрирования. Так как двойной интеграл в свою очередь приводится к повторному интегралу, то, следовательно, вычисление тройного интеграла приводится к трем последовательным простым интегрированиям.

Имея это в виду, в дальнейшем тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ по области v мы будем обозначать символом $\iiint_v f(x, y, z) dx dy dz$.

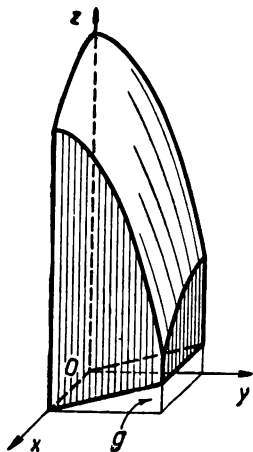
Пример. Вычислить массу однородного тела, ограниченного координатными плоскостями xOz и yOz , параболоидом $x^2 + y^2 = 6 - z$ и плоскостями $y = 4z$, $x = 1$ и $y = 2$ (черт. 32).

Решение. Так как данное тело v однородно, то плотность постоянна. Обозначим ее через μ . Тогда масса тела равна:

$$M = \mu \int \int \int_v dx dy dz.$$

Так как область интегрирования v снизу ограничена плоскостью $z = \frac{1}{4}y$, а сверху — параболоидом $z = 6 - x^2 - y^2$, то

$$\int \int \int_v dx dy dz = \int \int_g dx dy \int_{\frac{1}{4}y}^{6-x^2-y^2} dz,$$



Черт. 32

где g — проекция v на плоскость xOy , представляющая прямоугольник, ограниченный осями Ox и Oy и прямыми $x = 1$ и $y = 2$.

Продолжая вычисления, получим:

$$\begin{aligned} \int \int \int_v dx dy dz &= \int \int_g z \Big|_{\frac{1}{4}y}^{6-x^2-y^2} dx dy = \\ &= \int \int_g \left(6 - x^2 - y^2 - \frac{1}{4}y \right) dx dy = \\ &= \int_0^2 dy \int_0^1 \left(6 - \frac{y}{4} - y^2 - x^2 \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left[\left(6 - \frac{y}{4} - y^2 \right) x \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \right] dy = \\ &= \int_0^2 \left(\frac{17}{3} - \frac{y}{4} - y^2 \right) dy = \left(\frac{17}{3}y - \frac{y^2}{8} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{49}{6}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$M = \frac{49}{6} \mu.$$

§ 10. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических координатах

Вопрос о замене переменных в тройном интеграле решается таким же путем, как и в случае двойного интеграла.

Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в кублируемой области v и формулы

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta) \quad (1)$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие между всеми точками (ξ, η, ζ) области v' , с одной стороны, и всеми точками (x, y, z) области v , с другой стороны, то

$$\begin{aligned} & \iiint_v f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \iiint_{v'} f[x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)] |J| d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned} \quad (2)$$

где J — определитель Остроградского для системы (1):

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

На практике при вычислении тройных интегралов часто пользуются заменой прямоугольных координат так называемыми цилиндрическими и сферическими координатами.

Цилиндрические координаты точки $M(x, y, z)$ есть r , φ и z , где r — расстояние от точки M до оси Oz , φ — угол между плоскостью xOz и полуплоскостью, исходящей из оси Oz и проходящей через точку M , а z — аппликата точки M (черт. 33).

Очевидно, $0 \leq r < +\infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$.

В системе цилиндрических координат координатные поверхности

$$r = \text{const}, \quad \varphi = \text{const} \quad \text{и} \quad z = \text{const}$$

представляют соответственно круговые цилиндры с осью Oz , полуплоскости, исходящие из оси Oz , и плоскости, параллельные плоскости xOy .

Из чертежа видно, что

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Так как для системы

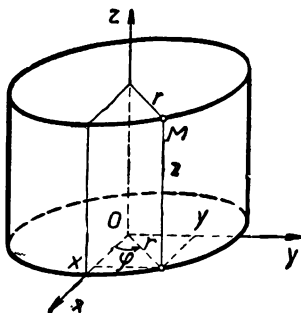
$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z, \quad (1')$$

отображающей область v на v' и обратно, имеем:

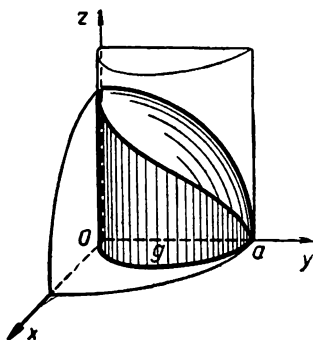
$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r, \end{aligned} \quad (3')$$

то

$$\begin{aligned} \iiint_v f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{v'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz. \end{aligned} \quad (2')$$



Черт. 33



Черт. 34

Пример 1. Вычислить массу M однородного тела, вырезанного из шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ цилиндром $x^2 + y^2 = ay$ (черт. 34).

Решение. В первом октанте находится одна четвертая часть тела, массу которого требуется вычислить. Обозначим эту часть через v , а плотность — через μ .

Тогда

$$\frac{1}{4} M = \mu \int_v \int \int dx dy dz$$

или в цилиндрических координатах

$$\frac{1}{4} M = \mu \int_v \int \int r dr d\varphi dz.$$

Интегрируя сначала по z от $z=0$ на нижней границе v до $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}=\sqrt{a^2-r^2}$ на верхней шаровой поверхности, получим:

$$\frac{1}{4} M = \mu \int_g \int r dr d\varphi \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} dz = \mu \int_g \int r \sqrt{a^2-r^2} dr d\varphi,$$

где g — полукруг, ограниченный осью Oy и полуокружностью $x=\sqrt{ay-y^2}$ или, что то же, $r=a \sin \varphi$.

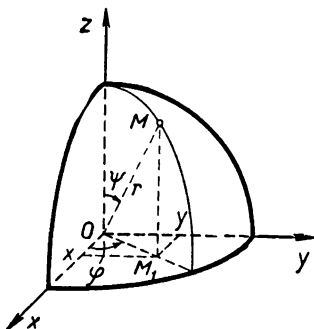
Вычисляя двойной интеграл по области g последовательным интегрированием сначала по r , а затем по φ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} M &= \mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \sin \varphi} \sqrt{a^2-r^2} r dr = \\ &= -\frac{\mu}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2-r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{a \sin \varphi} d\varphi = -\frac{\mu}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^3 \cos^3 \varphi - a^3) d\varphi = \\ &= \frac{\pi a^3}{6} \mu - \frac{a^3}{3} \mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{\pi a^3}{6} \mu - \frac{a^3}{3} \mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) d\sin \varphi = \\ &= \frac{\pi a^3}{6} \mu - \frac{a^3}{3} \mu \left(\sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^3}{6} \mu - \frac{2a^3}{9} \mu. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$M = \frac{2}{3} \left(\pi - \frac{4}{3} \right) a^3 \mu.$$

Сферические координаты точки $M(x, y, z)$ есть r , φ и ψ , где r — расстояние от начала координат до точки M , φ — угол между плоскостью xOz и полуплоскостью, исходящей из оси Oz и проходящей через точку M , а ψ — угол между положительным направлением оси Oz и отрезком OM , соединяющим начало O с точкой M (черт. 35).



Черт. 35

Очевидно,

$$0 \leq r < +\infty,$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$0 \leq \psi \leq \pi.$$

Здесь координатные поверхности следующие:
 $r = \text{const}$ — сферы с центром в начале координат,
 $\varphi = \text{const}$ — полуплоскости, исходящие из оси Oz ,
 $\psi = \text{const}$ — круговые конусы с осью Oz .

Из чертежа 35 видно, что

$$x = OM_1 \cos \varphi,$$

$$y = OM_1 \sin \varphi,$$

$$z = OM \cos \psi.$$

Но $OM_1 = OM \sin \psi$, а $OM = r$. Поэтому

$$x = r \cos \varphi \sin \psi, \quad y = r \sin \varphi \sin \psi, \quad z = r \cos \psi. \quad (1'')$$

Для системы (1''):

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \psi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \psi & \sin \varphi \sin \psi & \cos \psi \\ -r \sin \varphi \sin \psi & r \cos \varphi \sin \psi & 0 \\ r \cos \varphi \cos \psi & r \sin \varphi \cos \psi & -r \sin \psi \end{vmatrix}.$$

Разлагая этот определитель по элементам третьего столбца, получим:

$$J = r^2 \cos^2 \psi \sin \psi \begin{vmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix} - r^2 \sin^3 \psi \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = \\ = -r^2 \cos^2 \psi \sin \psi - r^2 \sin^3 \psi = -r^2 \sin \psi. \quad (3'')$$

Следовательно, $|J| = r^2 \sin \psi$ и

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \quad (2'') \\ = \iiint_V f(r \cos \varphi \sin \psi, r \sin \varphi \sin \psi, r \cos \psi) r^2 \sin \psi dr d\varphi d\psi.$$

Пример 2. Вычислить массу M тела, ограниченного полусферами $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ и $z = \sqrt{b^2 - x^2 - y^2}$ ($a < b$) и плоскостью xOy , если плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию от этой точки до общего центра сферических поверхностей тела, т. е. до начала координат.

Решение. Пусть v — та часть данного тела, которая находится в первом октанте (черт. 36). Обозначая плотность в точке (x, y, z) через $\mu(x, y, z)$, по условию имеем:

$$\mu(x, y, z) = k \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

Черт. 36

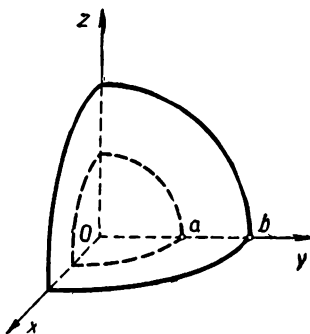
где k — некоторый постоянный коэффициент.

Следовательно,

$$\frac{1}{4} M = k \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz.$$

Воспользовавшись сферическими координатами, получим:

$$\frac{1}{4} M = \iiint_V r^3 \sin \psi dr d\varphi d\psi.$$



Так как полусферы, ограничивающие данное тело, в сферических координатах выражаются уравнениями $r=a$ и $r=b$, а φ и ψ для области v изменяются от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} M &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi \, d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_a^b r^3 \, dr = \\ &= \frac{b^4 - a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi \, d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi(b^4 - a^4)}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi \, d\psi = \\ &= \frac{\pi(b^4 - a^4)}{8}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$M = \frac{\pi(b^4 - a^4)}{2}.$$

ГЛАВА III

ПРИМЕНЕНИЯ ДВОЙНЫХ И ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

§ 1. Вычисление объемов тел и площадей плоских фигур

1. Пусть в квадрируемой области g функция $f(x, y)$ непрерывна и неотрицательна. Тогда двойной интеграл от $f(x, y)$ по области g выражает объем v цилиндрического тела, ограниченного снизу плоской фигурой g , сверху — той частью поверхности $z=f(x, y)$, которая проектируется в области g , а с боков — цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz , а направляющей служит замкнутый контур, ограничивающий область g :

$$v = \iint_g f(x, y) \, dx \, dy. \quad (1)$$

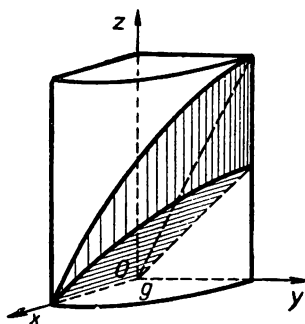
При помощи двойных интегралов можно вычислять и объемы тел более сложной формы, выражая искомый объем в виде некоторой алгебраической суммы объемов таких цилиндров, к которым формула (1) применима.

Пример 1. Вычислить объем цилиндрических клиньев, вырезаемых из цилиндра

$$x^2 + y^2 = r^2$$

плоскостями

$$z = y \quad \text{и} \quad z = 2y.$$



Черт. 37

Решение. Из чертежа 37, где изображена одна четвертая часть искомого объема v , видно, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} v &= v_1 - v_2 = \iint_g 2y \, dx \, dy - \iint_g y \, dx \, dy = \\ &= \iint_g y \, dx \, dy = \int_0^r y \, dy \int_0^{\sqrt{r^2 - y^2}} dx = \int_0^r y \sqrt{r^2 - y^2} \, dy = \\ &= -\frac{1}{3} (r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^r = \frac{r^3}{3}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$v = \frac{4}{3} r^3 \text{ (куб. ед.)}.$$

2. Если в квадратуемой области g $f(x, y) \equiv 1$, то двойной интеграл

$$\iint_g f(x, y) \, dx \, dy = \iint_g dx \, dy = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta \sigma_k = S_g,$$

где S_g есть площадь области g .

Следовательно, площадь S_g плоской фигуры g , лежащей в плоскости xOy , выражается формулой:

$$S_g = \iint_g dx \, dy. \quad (2)$$

Выразив в формуле (2) двойной интеграл в полярных координатах, для вычисления площади плоской фигуры g мы получим формулу:

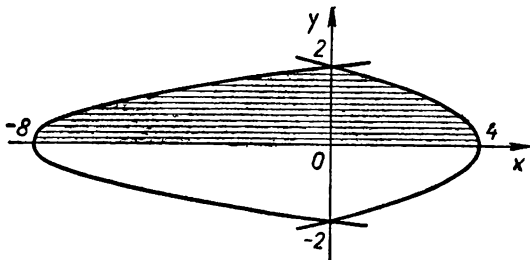
$$S_g = \iint_g \rho \, d\rho \, d\theta, \quad (2')$$

удобную в тех случаях, когда границы фигуры g даны уравнениями в полярных координатах.

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой

$$y^2 = 4 - x \quad \text{и} \quad 2y^2 = x + 8.$$

Решение. Пользуясь тем, что данная фигура симметрична относительно оси Ox (черт. 38), для вычисления



Черт. 38

искомой площади S достаточно вычислить площадь верхней части g данной фигуры и результат удвоить. Поэтому

$$\begin{aligned} S &= 2 \iint_g dx \, dy = 2 \int_0^2 dy \int_{2y^2-8}^{4-y^2} dx = \\ &= 2 \int_0^2 [(4-y^2) - (2y^2-8)] dy = 6 \int_0^2 (4-y^2) dy = \\ &= 24y \Big|_0^2 - 2y^3 \Big|_0^2 = 48 - 16 = 32 \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить площадь S , содержащуюся между кривыми

$$\rho = 3 - \sin \theta \quad \text{и} \quad \rho = 1 + \sin \theta.$$

Решение. Изобразив кривые (черт. 39) и воспользовавшись симметричностью фигуры, найдем:

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \iint_g \rho \, d\rho \, d\theta = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{1+\sin\theta}^{3-\sin\theta} \rho \, d\rho = \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(3-\sin\theta)^2 - (1+\sin\theta)^2] d\theta = \\
 &= 8 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\theta) d\theta = 8 \left(\theta \bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \cos\theta \bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = \\
 &= 8\pi.
 \end{aligned}$$

3. Если в кубируемой области v $f(x, y, z) \equiv 1$, то мы имеем:

$$\begin{aligned}
 \iiint_v f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \iiint_v dx \, dy \, dz = \\
 &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta v_k = \text{объем } v.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что объем кубируемой области v , который мы будем обозначать той же буквой v , выражается при помощи тройного интеграла формулой:

$$v = \iiint_v dx \, dy \, dz. \quad (3)$$

Пример 4. Вычислить объем V тела, ограниченного параболоидом

$$z + 1 = x^2 + y^2$$

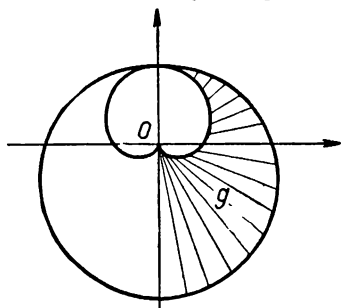
и плоскостью $z = 3$.

Решение. Из чертежа 40, где изображена одна четвертая часть данного тела, представляющая трехмерную

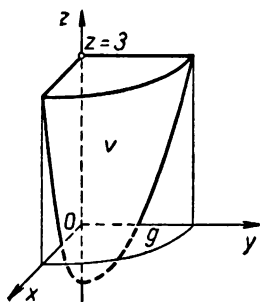
область v , видно, что

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} V &= \iiint_v dx dy dz = \iint_g dx dy \int_{x^2+y^2-1}^3 dz = \\ &= \iint_g (4 - x^2 - y^2) dx dy,\end{aligned}$$

где g — проекция v на плоскость xOy . Она ограничена осью Ox , осью Oy и проекцией на плоскость xOy линии



Черт. 39



Черт. 40

пересечения данного параболоида с плоскостью $z=3$. Уравнение этой линии есть

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Для его получения надо исключить z из системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 + z, \\ z = 3. \end{cases}$$

Замечаем, что дальнейшее вычисление легче вести при помощи полярных координат. Поэтому, переходя к полярным координатам, получим:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} V &= \iint_g (4 - \rho^2) \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 (4 - \rho^2) \rho d\rho = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^2 d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 2\pi.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$V = 8\pi.$$

§ 2. Площадь поверхности

Пусть в трехмерном пространстве дана некоторая поверхность. Замкнутым контуром L выделим участок A этой поверхности (черт. 41). Проекцию A на плоскость xOy обозначим через g . Мы будем считать область g квадрируемой. Относительно данной поверхности предположим, что она на участке A без разрывов и гладкая, т. е. такая, что в любой точке участка A есть касательная плоскость к данной поверхности, которая при перемещении точки касания меняет свое положение непрерывно. Аналитически эти условия относительно данной поверхности означают, что если уравнение поверхности есть

$$z = f(x, y), \quad (1)$$

то в области g функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$.

Поставим себе задачей определить площадь участка A данной поверхности и найти формулу для ее вычисления. С этой целью поступим следующим образом.

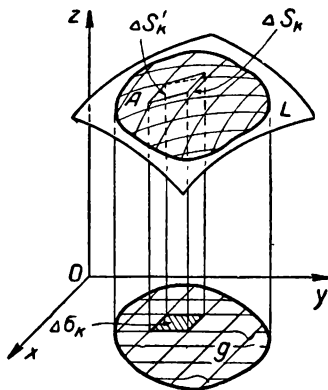
Разобьем область g на квадрируемые части $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_k, \dots, \Delta\sigma_n$. Проведя через точки контура каждой элементарной области $\Delta\sigma_k$ прямые, параллельные оси Oz , образуем цилиндрические поверхности, которые разобьют участок A данной поверхности на элементарные части

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_k, \dots, \Delta S_n.$$

В каждой элементарной области $\Delta\sigma_k$ выберем произвольным образом точку (ξ_k, η_k) и в соответствующей точке $P_k[\xi_k, \eta_k, f(\xi_k, \eta_k)]$ на ΔS_k проведем к данной поверхности касательную плоскость

$$f'_x(\xi_k, \eta_k)(x - \xi_k) + f'_y(\xi_k, \eta_k)(y - \eta_k) - \\ - (z - f(\xi_k, \eta_k)) = 0. \quad (2)$$

Та же цилиндрическая поверхность, которая выделяет на данной поверхности элементарный участок ΔS_k , выделит на касательной плоскости (2) участок $\Delta S'_k$.



Черт. 41

Сделав такое построение для всех k , мы покроем участок A данной поверхности (1) чешуйчатой поверхностью A' , состоящей из плоских фигур $\Delta S'_k$.

Площадь S участка A данной поверхности естественно определить как предел площади S' чешуйчатой поверхности A' при стремлении к нулю наибольшего диаметра d элементарных частей $\Delta\sigma_k$ области g , если только такой предел существует.

Обозначим площадь элементарной части $\Delta S'_k$ касательной плоскости (2) тем же символом $\Delta S'_k$. Тогда мы будем

иметь $S' = \sum_{k=1}^n \Delta S'_k$ и по определению:

$$S = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta S'_k. \quad (3)$$

Известно, что площадь проекции плоской фигуры на какую-нибудь плоскость равна произведению площади проектируемой фигуры на косинус острого угла между плоскостью проекции и плоскостью, в которой лежит проектируемая фигура. Поэтому, учитывая, что проекция $\Delta S'_k$ на плоскость xOy есть $\Delta\sigma_k$, имеем:

$$\Delta\sigma_k = \Delta S'_k \cdot \cos \gamma_k$$

и, следовательно,

$$\Delta S'_k = \frac{\Delta\sigma_k}{\cos \gamma_k},$$

где γ_k — острый угол между плоскостью xOy и касательной плоскостью (2) к данной поверхности в точке $P_k(\xi_k, \eta_k, f(\xi_k, \eta_k))$.

Так как вектор $\bar{N} \{0, 0, 1\}$ является нормальным к плоскости $z=0$, а вектор $N_k \{f'_x(\xi_k, \eta_k), f'_y(\xi_k, \eta_k), -1\}$ — нормальным к плоскости (2), то

$$\cos \gamma_k = \frac{1}{\sqrt{f'^2_x(\xi_k, \eta_k) + f'^2_y(\xi_k, \eta_k) + 1}}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^n \Delta S'_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + f'^2_x(\xi_k, \eta_k) + f'^2_y(\xi_k, \eta_k)} \Delta\sigma_k. \quad (4)$$

Так как по условию $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в области g непрерывны, то непрерывна и, значит, интегрируема в

области g функция $\sqrt{1 + f'_x{}^2(x, y) + f'_y{}^2(x, y)}$. Поэтому при $d \rightarrow 0$ сумма (4) имеет конечный предел:

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + f'_x{}^2(\xi_k, \eta_k) + f'_y{}^2(\xi_k, \eta_k)} \Delta \sigma_k &= \\ &= \iint_g \sqrt{1 + f'_x{}^2(x, y) + f'_y{}^2(x, y)} d\sigma. \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая равенство (3), определяющее S мы можем сделать вывод, что при данных условиях участок A поверхности (1) имеет площадь S , которая выражается формулой:

$$S = \iint_{g_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} d\sigma, \quad (5)$$

где g_{xy} означает то же самое, что и прежде g , а значки xy напоминают, что эта область интегрирования получена проектированием участка A данной поверхности на координатную плоскость xOy .

Нетрудно заметить, что если бы мы проектировали участок A данной поверхности на плоскость xOz и затем исходили бы из разбиения этой проекции — области g_{xz} , то получили бы формулу:

$$S = \iint_{g_{xz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz. \quad (5')$$

Наконец, исходя из разбиения проекции g_{yz} участка A данной поверхности на плоскость yOz , получим формулу:

$$S = \iint_{g_{yz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz. \quad (5'')$$

В формулах (5), (5') и (5'') частные производные должны быть взяты из уравнения данной поверхности и выражены через те переменные, по которым выполняется интегрирование.

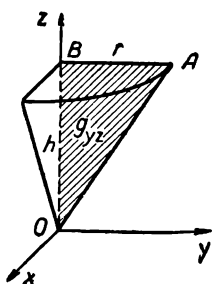
Пример. Вычислить площадь части конуса

$$x^2 + y^2 = \frac{r^2}{h^2} z^2,$$

отсеченной плоскостью

$$z = h.$$

Решение. Пользуясь симметрией, достаточно вычислить площадь четвертой части данной поверхности (черт. 42). Здесь удобнее воспользоваться формулой (5"). Поэтому областью интегрирования g_{yz} будет треугольник OAB , где сторона OA выражается уравнением $y = \frac{r}{h} z$, сторона



Черт. 42

AB — уравнением $z = h$, а в подынтегральное выражение надо подставить $\frac{\partial x}{\partial y}$ и $\frac{\partial x}{\partial z}$, вычисленные из уравнения конуса.

Дифференцируя по y и по z , получим:

$$\begin{aligned} 2x \frac{\partial x}{\partial y} + 2y &= 0, & \frac{\partial x}{\partial y} &= -\frac{y}{x}, \\ 2x \frac{\partial x}{\partial z} &= 2 \frac{r^2}{h^2} z, & \frac{\partial x}{\partial z} &= \frac{r^2}{h^2} \frac{z}{x}. \end{aligned}$$

Отсюда найдем:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} &= \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{r^4 z^2}{h^4 x^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{h^4 (x^2 + y^2) + r^4 z^2}}{h^2 x} = \frac{\sqrt{h^2 r^2 z^2 + r^4 z^2}}{h^2 \sqrt{\frac{r^2}{h^2} z^2 - y^2}} = \frac{r \sqrt{h^2 + r^2} z}{h^2 \sqrt{\frac{r^2}{h^2} z^2 - y^2}}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} S &= \iint_{g_{yz}} \frac{r \sqrt{h^2 + r^2} z}{h^2 \sqrt{\frac{r^2}{h^2} z^2 - y^2}} dy dz = \\ &= \frac{r \sqrt{h^2 + r^2}}{h^2} \int_0^h z dz \int_0^{\frac{r}{h} z} \frac{dy}{\sqrt{\frac{r^2}{h^2} z^2 - y^2}} = \\ &= \frac{r \sqrt{h^2 + r^2}}{h^2} \int_0^h z \left(\arcsin \frac{y}{\frac{r}{h} z} \right) \Big|_0^{\frac{r}{h} z} dz = \\ &= \frac{r \sqrt{h^2 + r^2}}{h^2} \int_0^h \frac{\pi}{2} z dz = \frac{\pi}{2} \frac{r \sqrt{h^2 + r^2}}{h^2} \frac{z^2}{2} \Big|_0^h = \frac{\pi r \sqrt{h^2 + r^2}}{4}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S = \pi r \sqrt{h^2 + r^2},$$

что можно получить и по известной формуле элементарной геометрии.

§ 3. Момент инерции и центр тяжести плоских фигур

1. Моментом инерции материальной точки относительно некоторой оси называется произведение массы этой точки на квадрат расстояния от этой точки до данной оси.

Момент инерции I_L относительно оси L системы материальных точек $P_1, P_2, \dots, P_n$ есть сумма моментов инерции всех этих точек относительно той же оси L и поэтому выражается формулой:

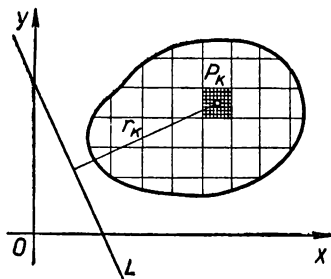
$$I_L = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2, \quad (1)$$

где m_k — масса точки P_k , а r_k — расстояние от точки P_k до оси L .

Пусть требуется найти момент инерции массы, распространенной по квадратируемой плоской фигуре g , относительно некоторой оси L , лежащей в одной плоскости с фигурой g .

В плоскости, в которой лежит данная фигура g , возьмем прямоугольную систему координат xOy (черт. 43). Пусть плотность, которая в общем случае меняется от точки к точке, есть $\mu(x, y)$.

Разобьем фигуру g на n квадратируемых частей $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$. В каждой элементарной области $\Delta\sigma_k$ выберем произвольным образом точку $P_k(\xi_k, \eta_k)$ и массу, распространенную по $\Delta\sigma_k$, будем считать сосредоточенной в точке P_k . Плотность на участке $\Delta\sigma_k$ будем считать постоянной и равной плотности



Черт. 43

$\mu(\xi_k, \eta_k)$ в точке P_k . Тогда, обозначая площадь области $\Delta\sigma_k$ тем же символом $\Delta\sigma_k$, мы будем иметь материальные точки P_k с массой $\Delta m_k = \mu(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Момент инерции построенной таким образом системы материальных точек $P_1, P_2, \dots, P_n$ относительно оси L выражается согласно формуле (1) суммой

$$\sum_{k=1}^n r^2(\xi_k, \eta_k) \mu(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k,$$

где $r(\xi_k, \eta_k)$ — расстояние от точки $P_k(\xi_k, \eta_k)$ до оси L , а предел этой суммы при стремлении к нулю наибольшего диаметра d элементарных частей $\Delta\sigma_k$ фигуры g естественно принять за искомый момент инерции I_L данной плоской фигуры g .

Следовательно, мы имеем формулу:

$$I_L = \int \int_g r^2(x, y) \mu(x, y) dx dy. \quad (2)$$

Пусть плотность μ постоянна. Положим даже $\mu = 1$. Тогда

$$I_L = \int \int_g r^2(x, y) dx dy. \quad (2')$$

Если ось L совпадает с координатной осью Ox , то $r^2 = y^2$. Поэтому при $\mu = 1$ имеем:

$$I_x = \int \int_g y^2 dx dy.$$

Подобным же образом при $\mu = 1$ находим:

$$I_y = \int \int_g x^2 dx dy.$$

Заметим, наконец, что момент инерции массы фигуры g относительно начала координат, т. е. относительно оси, проходящей через начало координат перпендикулярно к плоскости xOy , при $\mu = 1$, есть

$$I_0 = \int \int_g (x^2 + y^2) dx dy.$$

Очевидно, что

$$I_0 = I_x + I_y$$

независимо от того, будет ли в g плотность μ постоянной или переменной — функцией от точки.

Пример 1. Вычислить момент инерции I однородной массы, распространенной по плоской фигуре, ограниченной параболой $y=x^2$ и прямой $y=1$, относительно прямой $y=-1$ (черт. 44).

Решение. Так как масса однородна, то плотность μ постоянна. Положим $\mu=1$. Расстояние r от любой точки $P(x, y)$ данной фигуры до оси $y=-1$ выражается формулой $r=y+1$. Так как данная фигура симметрична относительно оси Oy , то

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_{\varepsilon} \int (y+1)^2 dx dy = 2 \int_0^1 (y+1)^2 dy \int_0^{\sqrt{y}} dx = \\ &= 2 \int_0^1 (y+1)^2 \sqrt{y} dy = 2 \int_0^1 (y^{\frac{5}{2}} + 2y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{1}{2}}) dy = \\ &= 2 \left(\frac{2}{7} + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \right) = \frac{368}{105}. \end{aligned}$$

2. Если в точках $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_n(x_n, y_n)$ плоскости xOy сосредоточены массы соответственно $m_1, m_2, \dots, m_n$, то координаты $\bar{x}$ и $\bar{y}$ центра тяжести этой системы материальных точек вычисляются по формулам:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k m_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^n y_k m_k}{\sum_{k=1}^n m_k}.$$

Поэтому координаты построенной выше системы материальных точек

$$P_1(\xi_1, \eta_1), P_2(\xi_2, \eta_2), \dots, P_n(\xi_n, \eta_n),$$

обладающих массой соответственно

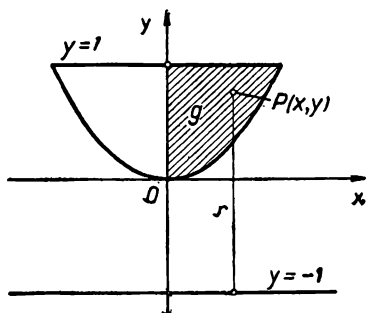
$$\mu(\xi_1, \eta_1) \Delta \sigma_1, \mu(\xi_2, \eta_2) \Delta \sigma_2, \dots, \mu(\xi_n, \eta_n) \Delta \sigma_n,$$

равны:

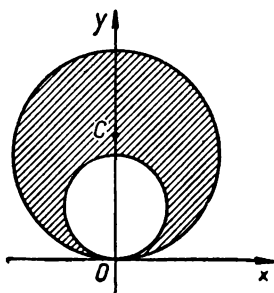
$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k \mu(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k}{\sum_{k=1}^n \mu(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^n \eta_k \mu(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k}{\sum_{k=1}^n \mu(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k}.$$

Определяя теперь координаты x_c и y_c центра тяжести массы, распространенной по данной плоской фигуре g , как пределы координат $\bar{x}$ и $\bar{y}$ системы материальных точек



Черт. 44



Черт. 45

$P_k(\xi_k, \eta_k)$ ($k=1, 2, \dots, n$) при $d \rightarrow 0$, что является вполне естественным, мы получим формулы:

$$x_c = \frac{\iint_g \mu(x, y) x dx dy}{\iint_g \mu(x, y) dx dy}, \quad y_c = \frac{\iint_g \mu(x, y) y dx dy}{\iint_g \mu(x, y) dx dy}. \quad (3)$$

В том случае, когда масса однородна и, следовательно, плотность μ постоянна в области g , формулы (3) упрощаются; в этом случае в числителе и знаменателе μ можно вынести за знак двойного интеграла и сократить, в результате чего получим:

$$x_c = \frac{\iint_g x dx dy}{\iint_g dx dy}, \quad y_c = \frac{\iint_g y dx dy}{\iint_g dx dy}. \quad (3')$$

Пример 2. Найти центр тяжести однородной массы, распространенной по области между окружностями $\rho = 2 \sin \theta$ и $\rho = 4 \sin \theta$ (черт. 45).

Решение. Так как данная область g симметрична относительно оси Oy , то центр тяжести $\bar{C}(x_c, y_c)$ находится на оси Oy ; поэтому $x_c = 0$. Вторую координату найдем по формуле:

$$y_c = \frac{\iint_g y \, dx \, dy}{\iint_g dx \, dy}.$$

Знаменатель формулы представляет площадь данной фигуры и равняется 3π — разности площадей данных кругов. Вычисляя числитель при помощи полярных координат, получим:

$$\begin{aligned} \iint_g y \, dx \, dy &= \iint_g \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta = \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_{2\sin \theta}^{4\sin \theta} \rho^2 \, d\rho = \\ &= \frac{56}{3} \int_0^\pi \sin^4 \theta \, d\theta = \frac{14}{3} \int_0^\pi (1 - \cos 2\theta)^2 \, d\theta = \\ &= \frac{14}{3} \int_0^\pi \left(1 - 2\cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2} \right) d\theta = 7\pi. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$y_c = \frac{7\pi}{3\pi} = \frac{7}{3}$$

и искомый центр тяжести есть точка $C\left(0, \frac{7}{3}\right)$.

§ 4. Момент инерции и центр тяжести поверхностей

1. Пусть по участку A поверхности

$$z = f(x, y), \tag{1}$$

который имеет площадь S , распространена масса. Пусть плотность выражается функцией $\mu(x, y, f(x, y))$.

Совершенно таким же образом, как при определении площади поверхности в § 2, разобьем область g , представляющую проекцию A на плоскость xOy , на элементарные части $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$, а участок A поверхно-

сти (1) — на части $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ и для каждой части ΔS_k в произвольно выбранной на ΔS_k точке $P_k (\xi_k, \eta_k, f(\xi_k, \eta_k))$ построим элемент $\Delta S'_k$ касательной плоскости к данной поверхности (черт. 41).

Массу, распространенную по ΔS_k , будем считать сосредоточенной в точке P_k , причем плотность участка ΔS_k будем считать постоянной и равной $\mu(\xi_k, \eta_k, f(\xi_k, \eta_k))$ — плотности в точке P_k . Это означает, что за массу участка ΔS_k мы принимаем произведение плотности в точке P_k на площадь участка ΔS_k . Наконец, вместо площади ΔS_k возьмем площадь соответствующего элемента касательной плоскости $\Delta S'_k$. Таким образом мы получим материальные точки $P_k (\xi_k, \eta_k, f(\xi_k, \eta_k))$ с массой:

$$\begin{aligned} \Delta m_k &= \mu(\xi_k, \eta_k, f(\xi_k, \eta_k)) \Delta S'_k = \\ &= \mu(\xi_k, \eta_k, f(\xi_k, \eta_k)) \sqrt{1 + f'^2_x(\xi_k, \eta_k) + f'^2_y(\xi_k, \eta_k)} \Delta \sigma_k \\ (k &= 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Момент инерции построенной системы материальных точек $P_1, P_2, \dots, P_n$ относительно некоторой оси L выражается суммой

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n r^2(\xi_k, \eta_k, f(\xi_k, \eta_k)) \mu(\xi_k, \eta_k, f(\xi_k, \eta_k)) \times \\ \times \sqrt{1 + f'^2_x(\xi_k, \eta_k) + f'^2_y(\xi_k, \eta_k)} \Delta \sigma_k, \end{aligned} \quad (2)$$

где $r(\xi_k, \eta_k, f(\xi_k, \eta_k))$ есть расстояние от точки P_k до оси L .

Предел суммы (2) при $d \rightarrow 0$, если он существует, естественно принять за момент инерции I_L массы, распространенной по участку A данной поверхности (1).

Поэтому

$$I_L = \iint_A r^2(x, y, z) \mu(x, y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy, \quad (3)$$

где z и производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ надо выразить через x и y из уравнения данной поверхности (1).

Пусть плотность μ постоянна. Примем даже $\mu = 1$. Тогда получим:

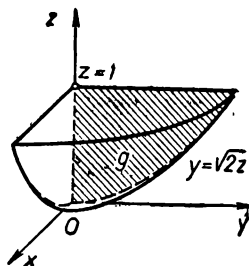
$$I_L = \int \int_g r^2(x, y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (4)$$

Если ось L совпадает с координатной осью Oz , то $r^2 = x^2 + y^2$; поэтому при $\mu = 1$ мы имеем:

$$I_z = \int \int_g (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (5)$$

В формулах (3), (4) и (5) область интегрирования g есть проекция участка A данной поверхности на плоскость xOy . Если бы мы при определении I_L исходили из разбиения проекции A на плоскость xOz или yOz , то для момента инерции получили бы другие варианты этих формул, как это имело место в § 2 при определении площади поверхности (формулы (5), (5') и (5'')).

Пример 1. Вычислить момент инерции относительно оси Oz однородной массы, распространенной по части параболоида $x^2 + y^2 = 2z$, отсеченной плоскостью $z = 1$ (черт. 46).



Черт. 46

Решение. Пользуясь тем, что данная поверхность симметрична относительно оси Oz , мы сначала вычислим момент инерции относительно оси Oz только той части данной поверхности, которая расположена в первом октанте, а затем полученный результат учетверим.

Здесь лучше воспользоваться тем вариантом формулы I_z , который получается при проектировании рассматриваемого участка поверхности на плоскость yOz . Поэтому

$$\frac{1}{4} I_z = \int \int_g (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz.$$

Из уравнения параболоида, дифференцируя сначала по y , а потом по z , находим:

$$2xx'_y + 2y = 0, \quad x'_y = -\frac{y}{x};$$

$$2xx'_z = 2, \quad x'_z = \frac{1}{x}.$$

Откуда следует:

$$\sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}{x}.$$

Подставив в выражение $\frac{1}{4} I_z$, получим:

$$\frac{1}{4} I_z = \int \int_g (x^2 + y^2) \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}{x} dy dz.$$

Так как двойной интеграл берется по области g в плоскости yOz , то x под знаком интеграла надо выразить через y и z , пользуясь уравнением данной поверхности — параболоида $x^2 + y^2 = 2z$:

$$\frac{1}{4} I_z = \int \int_g 2z \frac{\sqrt{2z + 1}}{\sqrt{2z - y^2}} dy dz.$$

Область g ограничена осью Oz , прямой $z = 1$ и параболой $2z = y^2$ — линией пересечения параболоида с плоскостью yOz ; поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} I_z &= 2 \int_0^1 z \sqrt{2z + 1} dz \int_0^{\sqrt{2z}} \frac{dy}{\sqrt{2z - y^2}} = \\ &= 2 \int_0^1 z \sqrt{2z + 1} \arcsin \frac{y}{\sqrt{2z}} \Big|_0^{\sqrt{2z}} dz = \pi \int_0^1 z \sqrt{2z + 1} dz. \end{aligned}$$

Далее, пользуясь методом интегрирования по частям, получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} I_z &= \pi \left[z \cdot \frac{1}{3} (2z + 1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 (2z + 1)^{\frac{3}{2}} dz \right] = \\ &= \pi \left[3^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} (2z + 1)^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 \right] = \pi \left(\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{5} + \frac{1}{15} \right) = \\ &= \frac{6\sqrt{3} + 1}{15} \pi. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I_z = \frac{4}{15} (6\sqrt{3} + 1) \pi.$$

2. Определяя координаты x_c , y_c , z_c центра тяжести массы, распространенной по участку A данной поверхности, переходом к пределу при $d \rightarrow 0$ в выражениях координат центра тяжести системы материальных точек P_1 , P_2 , ..., P_n , построенной выше, мы получим:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\int \int_g x \mu(x, y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy}{\int \int_g \mu(x, y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy}, \\ y_c &= \frac{\int \int_g y \mu(x, y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy}{\int \int_g \mu(x, y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy}, \\ z_c &= \frac{\int \int_g z \mu(x, y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy}{\int \int_g \mu(x, y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy}. \end{aligned} \quad (6)$$

Подынтегральные функции везде должны быть выражены через x и y , пользуясь уравнением данной поверхности.

Формулы (6) при $\mu = \text{const}$ упрощаются, так как в этом случае в числителе и знаменателе μ можно вынести за знак двойного интеграла и сократить.

Наконец, следует помнить, что формулы (6) связаны с проектированием рассматриваемого участка A данной поверхности на плоскость xOy . При проектировании A на другие координатные плоскости будут получены другие варианты формул (6). В этом отношении здесь мы опять имеем полную аналогию с вопросом о площади участка A данной поверхности, для вычисления которой мы получили в § 2 три формулы (5), (5'), (5'').

Пример 2. Найти центр тяжести однородной массы, распространенной по части конуса $x^2 + y^2 = \frac{r^2}{h^2} z^2$, отсеченной плоскостью $z = h$ (черт. 42).

Решение. Так как данная поверхность симметрична относительно оси Oz , а масса однородна, то искомый центр тяжести находится на оси Oz , и поэтому $x_c = y_c = 0$.

Остается найти только z_c . Очевидно, что центр тяжести каждой четверти данной поверхности, на которые поверхность делится координатными плоскостями, находится на одном и том же уровне по отношению к плоскости xOy . Отсюда следует, что аппликата центра тяжести всей данной поверхности совпадает с аппликацией центра тяжести одной четверти этой поверхности. Поэтому вычисления мы будем вести применительно к той части данной поверхности, которая находится в первом октанте.

Пользуясь тем вариантом формул (6), который соответствует проектированию на плоскость yOz , имеем:

$$z_c = \frac{\iint_g z \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2} dy dz}{\iint_g \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2} dy dz}.$$

Знаменатель представляет площадь рассматриваемого участка поверхности, поэтому он равен $\frac{1}{4} \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$. Остается вычислить только числитель.

Из уравнения конуса находим:

$$x_y' = -\frac{y}{x}, \quad x_z' = \frac{r^2}{h^2} \frac{z}{x},$$

$$\sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2} = \frac{r \sqrt{r^2 + h^2}}{h^2} \frac{z}{\sqrt{\frac{r^2}{h^2} z^2 - y^2}}$$

(см. пример в § 2). Поэтому

$$\begin{aligned} z_c &= \frac{4}{\pi h^3} \int_g \int \frac{z^2 dy dz}{\sqrt{\frac{r^2}{h^2} z^2 - y^2}} = \\ &= \frac{4}{\pi h^3} \int_0^h z^2 dz \int_0^{\frac{r}{h} z} \frac{dy}{\sqrt{\frac{r^2}{h^2} z^2 - y^2}} = \\ &= \frac{4}{\pi h^3} \int_0^h z^2 \arcsin \frac{y}{\frac{r}{h} z} \bigg|_0^{\frac{r}{h} z} dz = \frac{2}{h^2} \int_0^h z^2 dz = \frac{2}{3} h. \end{aligned}$$

Следовательно, искомый центр тяжести находится в точке $C\left(0, 0, \frac{2}{3} h\right)$.

§ 5. Момент инерции и центр тяжести тел

1. Пусть требуется найти момент инерции относительно некоторой оси L массы, распространенной по кубируемой трехмерной области v . Пусть плотность, которая в общем случае меняется от точки к точке, выражается функцией $\mu(x, y, z)$.

Для решения поставленной задачи поступим следующим образом.

Разобьем область v на n кубируемых частей $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$ (черт. 47). В каждой элементарной части Δv_k выберем произвольным образом точку $P_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$. Массу, распространенную по Δv_k , будем считать сосредоточенной в точке P_k .

Плотность в Δv_k будем считать постоянной и равной плотности $\mu(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ в точке P_k . Тогда, обозначая объем области Δv_k тем же символом Δv_k , мы будем иметь материальную точку P_k с массой $\Delta m_k = \mu(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k$ ($k=1, 2, \dots, n$).

Момент инерции построенной таким образом системы материальных точек $P_1, P_2, \dots, P_n$ относительно оси L равен сумме

$$\sum_{k=1}^n r^2(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \mu(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k,$$

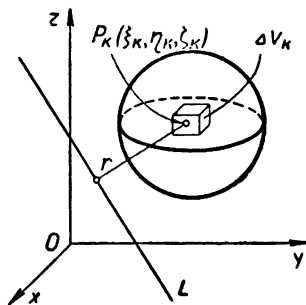
где $r(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ — расстояние от точки $P_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ до оси L , а предел этой суммы при стремлении к нулю наибольшего диаметра d элементарных частей Δv_k области v естественно принять за искомый момент инерции I_L данной массы, распространенной по области v .

Следовательно, мы имеем формулу:

$$I_L = \int \int \int_v r^2(x, y, z) \mu(x, y, z) dx dy dz. \quad (1)$$

Пусть масса однородна и поэтому плотность μ постоянна в области v . Положим даже $\mu=1$. Тогда

$$I_L = \int \int \int_v r^2(x, y, z) dx dy dz. \quad (1')$$



Черт. 47

Если ось L совпадает с координатной осью Oz , то $r^2 = x^2 + y^2$. Поэтому при $\mu = 1$ имеем:

$$I_z = \int \int \int_v (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

Подобным же образом при $\mu = 1$ находим:

$$I_y = \int \int \int_v (x^2 + z^2) dx dy dz,$$

$$I_x = \int \int \int_v (y^2 + z^2) dx dy dz.$$

2. Чтобы найти координаты x_c , y_c , z_c центра тяжести данной массы, распространенной по трехмерной области v , достаточно взять координаты центра тяжести построенной выше системы материальных точек

$$P_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), P_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2), \dots, P_n(\xi_n, \eta_n, \zeta_n),$$

обладающих массой соответственно

$$\mu(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \Delta v_1, \mu(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) \Delta v_2, \dots, \mu(\xi_n, \eta_n, \zeta_n) \Delta v_n,$$

и перейти к пределу при $d \rightarrow 0$. Таким путем мы получим формулы:

$$x_c = \frac{\int \int \int_v x \mu(x, y, z) dx dy dz}{\int \int \int_v \mu(x, y, z) dx dy dz}, \quad y_c = \frac{\int \int \int_v y \mu(x, y, z) dx dy dz}{\int \int \int_v \mu(x, y, z) dx dy dz},$$

$$z_c = \frac{\int \int \int_v z \mu(x, y, z) dx dy dz}{\int \int \int_v \mu(x, y, z) dx dy dz}. \quad (2)$$

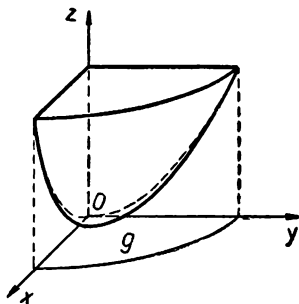
В том случае, когда масса данного тела v однородна и, следовательно, плотность μ постоянна, формулы (2) упрощаются, так как в числителе и знаменателе $\mu = \text{const}$ можно вынести за знак тройного интеграла и сократить.

Пример. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного параболоидом $x^2 + y^2 = z$ и плоскостью $z = 1$ (черт. 48).

Решение. Так как данное тело симметрично относительно оси Oz и масса однородна, то центр тяжести тела

находится на оси Oz ; поэтому $x_c = y_c = 0$. Аппликата центра тяжести тела, очевидно, совпадает с аппlikатой центра тяжести той части v тела, которая расположена в первом октанте. Поэтому имеем:

$$z_c = \frac{\int \int \int_v z \, dx \, dy \, dz}{\int \int \int_v dx \, dy \, dz}.$$



Черт. 48

Тройные интегралы в числителе и знаменателе вычисляем отдельно. При этом учитываем, что проекция линии пересечения параболоида $x^2 + y^2 = z$ с плоскостью $z = 1$ на плоскость xOy есть окружность $x^2 + y^2 = 1$.

Воспользовавшись цилиндрическими координатами, в знаменателе получим:

$$\begin{aligned} \int \int \int_v dx \, dy \, dz &= \int \int \int_v r \, dr \, d\varphi \, dz = \int_g \int_{r^2}^1 r \, dr \, d\varphi \int_0^1 dz = \\ &= \int_g \int_{r^2}^1 (r - r^3) \, dr \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 (r - r^3) \, dr = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

В числителе имеем:

$$\begin{aligned} \int \int \int_v z \, dx \, dy \, dz &= \int \int \int_v z \, r \, dr \, d\varphi \, dz = \int_g \int_{r^2}^1 r \, dr \, d\varphi \int_{r^2}^1 z \, dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_g \int_{r^2}^1 r (1 - r^4) \, dr \, d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 (r - r^5) \, dr = \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$z_c = \frac{\pi}{12} : \frac{\pi}{8} = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, центр тяжести данного тела находится в точке $C(0, 0, \frac{2}{3})$.

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Задача о работе силового поля

Если материальная точка движется прямолинейно под действием постоянной силы, то работой W , произведенной этой силой, называется скалярное произведение вектора силы $\vec{f}$ на вектор перемещения $\vec{s}$:

$$W = \vec{f} \vec{s}.$$

Если же материальная точка движется по некоторой кривой AB в плоскости xOy под действием силового поля, т. е. под действием силы $\vec{f}(x, y)$, меняющейся от точки к точке, то работу W , произведенную силой $\vec{f}$ на пути AB , естественно определить при помощи операции перехода к пределу, поступая для этого следующим образом.

Разобьем кривую AB на элементарные части, взяв на ней точки:

$$A = M_0(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), \dots, M_k(x_k, y_k), \dots, M_n(x_n, y_n) = B.$$

Движение материальной точки по дуге $M_k M_{k+1}$ под действием переменной силы $\vec{f}(x, y)$ мы сначала заменим движением точки по хорде $\overline{M_k M_{k+1}}$ под действием постоянной силы, равной значению $\vec{f}(\xi_k, \eta_k)$ силы $\vec{f}(x, y)$ в некоторой произвольно выбранной точке (ξ_k, η_k) на дуге $M_k M_{k+1}$. Работа, производимая силой $\vec{f}(\xi_k, \eta_k)$ на отрезке $\overline{M_k M_{k+1}}$, равна:

$$\Delta W_k = \vec{f}(\xi_k, \eta_k) \cdot \overline{M_k M_{k+1}}.$$

Обозначив через $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ проекции силы $\vec{f}(x, y)$ соответственно на направления осей Ox и Oy , а через Δx_k и Δy_k — разности $x_{k+1} - x_k$ и $y_{k+1} - y_k$, являющиеся проекциями вектора $\overline{M_k M_{k+1}}$ на координатные оси мы будем иметь:

$$\begin{aligned}\bar{f}(x, y) &= P(x, y) \bar{i} + Q(x, y) \bar{j}, \\ \bar{f}(\xi_k, \eta_k) &= P(\xi_k, \eta_k) \bar{i} + Q(\xi_k, \eta_k) \bar{j}, \\ \overline{M_k M_{k+1}} &= \Delta x_k \bar{i} + \Delta y_k \bar{j},\end{aligned}$$

где $\bar{i}$ и $\bar{j}$ — единичные векторы, определяющие направления оси Ox и оси Oy . Отсюда по правилу скалярного умножения векторов, заданных в координатной форме, получим:

$$\Delta W_k = P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k.$$

Затем составим сумму $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta W_k$ элементарных работ

ΔW_k , соответствующих всем звеньям $\overline{M_k M_{k+1}}$, вписанной в кривую AB ломаной.

Теперь ясно, что под работой W , произведенной силой $\bar{f}(x, y)$ на пути AB , естественно понимать предел суммы $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta W_k$ или, что то же самое, суммы

$$\sum_{k=0}^{n-1} [P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] \quad (1)$$

при стремлении к нулю длин элементарных дуг кривой AB .

В тех случаях, когда $Q(x, y) \equiv 0$ или $P(x, y) \equiv 0$, вместо суммы (1) мы получим соответственно

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k \quad (2)$$

или

$$\sum_{k=0}^{n-1} Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k. \quad (3)$$

Совершенно таким же путем можно определить работу, производимую переменной силой $\bar{f}(x, y, z)$ при движении материальной точки по пространственной кривой.

Суммы (2) и (3), а также и более общего вида сумма (1) образуются аналогично интегральной сумме $\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$

для функции одной переменной $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ оси Ox , но эти суммы связаны с функциями двух переменных $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, определенными на кривой в плоскости xOy .

Следовательно, задача об определении работы силового поля указывает на необходимость обобщения понятия интеграла на случай функций нескольких переменных, определенных вдоль кривых. Это достигается введением в математическом анализе криволинейных интегралов.

§ 2. Понятие криволинейного интеграла

Здесь мы рассмотрим криволинейные интегралы для функций двух переменных.

Пусть в некоторой области, содержащей непрерывную кривую AB , определена функция $f(x, y)$.

Кривую AB разобьем точками

$$A = M_0(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), \dots, M_k(x_k, y_k), \dots, \\ M_n(x_n, y_n) = B$$

на части $\widetilde{M_0M_1}$, $\widetilde{M_1M_2}$, ..., $\widetilde{M_kM_{k+1}}$, ..., $\widetilde{M_{n-1}M_n}$. На каждой из элементарных дуг $\widetilde{M_kM_{k+1}}$ возьмем произвольным образом точку (ξ_k, η_k) и составим сумму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k,$$

где $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.

Если при стремлении к нулю длины Δs наибольшей из дуг $\widetilde{M_kM_{k+1}}$ сумма σ имеет конечный предел, не зависящий ни от способа разбиения кривой AB , ни от выбора точек (ξ_k, η_k) на элементарных дугах $\widetilde{M_kM_{k+1}}$, то этот предел называется криволинейным интегралом от $f(x, y) dx$ по кривой (по пути) AB и обозначается символом

$$\int_{AB} f(x, y) dx.$$

Таким образом, по определению имеем:

$$\int_{AB} f(x, y) dx = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k.$$

Аналогично вводится понятие криволинейного интеграла от $f(x, y) dy$ по кривой AB :

$$\int_{AB} f(x, y) dy = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k.$$

Вводится также понятие криволинейного интеграла более общего вида:

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

который определяется равенством

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AB} P(x, y) dx + \int_{AB} Q(x, y) dy.$$

Сопоставляя принятое в предыдущем параграфе определение работы силового поля с определениями криволинейных интегралов, замечаем, что работа W , производимая переменной силой $\vec{f}(x, y)$ при движении материальной точки по пути AB , выражается формулой:

$$W = \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — проекции силы $\vec{f}(x, y)$ соответственно на оси Ox и Oy . Эта формула выясняет физический смысл криволинейных интегралов и показывает нам одно из практических применений криволинейных интегралов.

§ 3. Существование и свойства криволинейных интегралов

Пусть дана кривая AB в параметрической форме уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — функции параметра t , непрерывные вместе с производными $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем изменению параметра t от α до β соответствует движение точки $M(x, y)$ по кривой AB от A до B .

Пусть в некоторой области, содержащей кривую AB , дана непрерывная функция $f(x, y)$.

Разобьем кривую AB на n частей, взяв на ней точки $A = M_0(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), \dots, M_k(x_k, y_k), \dots, M_n(x_n, y_n) = B$.

На каждой из элементарных дуг $\widetilde{M_k M_{k+1}}$ выберем произвольным образом точку $M'_k(\xi_k, \eta_k)$ и составим сумму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k, \quad (2)$$

где $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.

Докажем, что если число точек разбиения кривой AB неограниченно возрастает так, что длина Δs наибольшей из дуг $\widetilde{M_k M_{k+1}}$ стремится к нулю, то сумма σ стремится к конечному пределу, который не зависит ни от способа разбиения кривой AB , ни от выбора точек $M'_k(\xi_k, \eta_k)$ на элементарных частях $\widetilde{M_k M_{k+1}}$ кривой AB .

В самом деле, обозначая через t_k значение параметра t в точке M_k , а через τ_k — в точке M'_k , мы имеем:

$$\begin{aligned} x_k &= \varphi(t_k), & y_k &= \psi(t_k), \\ \xi_k &= \varphi(\tau_k), & \eta_k &= \psi(\tau_k), \end{aligned}$$

и поэтому

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)] [\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)].$$

Согласно условию функция $\varphi(t)$ непрерывна и имеет производную $\varphi'(t)$ на каждом из отрезков $[t_k, t_{k+1}]$, поэтому в силу теоремы Лагранжа найдется такая точка $\tau'_k \in (t_k, t_{k+1})$, что будет верно равенство

$$\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \varphi'(\tau'_k) \Delta t_k,$$

где $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$. Отсюда следует, что сумма σ может быть представлена в виде

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)] \varphi'(\tau'_k) \Delta t_k. \quad (2')$$

Если бы τ'_k и τ_k совпадали, то правая часть (2') представляла бы интегральную сумму для непрерывной функции $f[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t)$ одной переменной t на отрезке $[\alpha, \beta]$, а так как непрерывная функция интегрируема, то существование предела суммы σ прямо бы вытекало из равенства (2'). Но мы не можем принять $\tau_k = \tau'_k$, так как τ_k выбирается из отрезка $[t_k, t_{k+1}]$ произвольно, а $\tau'_k \in (t_k, t_{k+1})$ определяется формулой Лагранжа, примененной к разности $\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)$. Поэтому для доказательства существования предела суммы σ требуются дополнительные рассуждения.

Положим,

$$\varphi'(\tau'_k) = \varphi'(\tau_k) + h_k.$$

Тогда из соотношения (2') получим:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=0}^{n-1} f[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)] \varphi'(\tau_k) \Delta t_k + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} f[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)] h_k \Delta t_k. \end{aligned} \quad (2'')$$

Докажем, что при $\Delta s \rightarrow 0$ вторая сумма в правой части (2'') имеет предел, равный 0.

Так как непрерывная функция $f[\varphi(t), \psi(t)]$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ ограничена, то существует такое число $L > 0$, что

$$|f[\varphi(t), \psi(t)]| < L \quad (3)$$

для всех значений t из отрезка $[\alpha, \beta]$.

По условию $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ непрерывна и, следовательно, равномерно непрерывна; поэтому для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых $t' \in [\alpha, \beta]$ и $t'' \in [\alpha, \beta]$, удовлетворяющих условию $|t' - t''| < \delta$, верно неравенство $|\varphi'(t') - \varphi'(t'')| < \epsilon$.

Рассмотрим любое разбиение кривой AB , удовлетворяющее только одному требованию: Δs настолько мало, что $|\Delta t_k| < \delta$ для всех k . Тогда, очевидно, $|\tau'_k - \tau_k| < \delta$ и, следовательно,

$$|h_k| = |\varphi'(\tau'_k) - \varphi'(\tau_k)| < \epsilon \quad (4)$$

для всех k .

В силу неравенств (3) и (4) имеем:

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)] h_k \Delta t_k \right| < L \varepsilon |\beta - \alpha|. \quad (5)$$

Так как числа L и $|\beta - \alpha|$ фиксированные, а ε — произвольно малое, то правая часть неравенства (5) может быть сделана как угодно малой, если только Δs достаточно мало. Это означает, что

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)] h_k \Delta t_k = 0.$$

Итак, доказано, что при $\Delta s \rightarrow 0$ вторая сумма в выражении (2'') для σ имеет предел, равный 0. Что же касается первой суммы в этом выражении, то она представляет интегральную сумму для непрерывной функции $f[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t)$ одной переменной t на отрезке $[\alpha, \beta]$, поэтому она при $\Delta s \rightarrow 0$, а значит, и $\Delta t \rightarrow 0$ имеет предел,

равный интегралу $\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) dt$.

Отсюда следует, что при $\Delta s \rightarrow 0$ сумма σ имеет конечный предел, т. е. существует

$$\int_{AB} f(x, y) dx = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k,$$

причем имеет место равенство

$$\int_{AB} f(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (6)$$

Аналогично доказывается, что существует

$$\int_{AB} f(x, y) dy = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k$$

и имеет место равенство

$$\int_{AB} f(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \psi'(t) dt. \quad (7)$$

Теперь ясно, что если в некоторой области, содержащей кривую (1), даны две непрерывные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, то существует криволинейный интеграл

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

и имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)] \psi'(t)\} dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Равенства (6), (7) и (8) могут служить формулами для вычисления криволинейных интегралов. По этим формулам вычисление криволинейных интегралов сводится к вычислению обыкновенных определенных интегралов.

Если за параметр принята абсцисса x и кривая AB дана уравнением вида

$$y = \psi(x), \quad (1')$$

где $\psi(x)$ непрерывна вместе с производной $\psi'(x)$ на отрезке $[a, b]$, соответствующем кривой AB , то формула (8) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} & \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\ &= \int_a^b \{P[x, \psi(x)] + Q[x, \psi(x)] \psi'(x)\} dx. \end{aligned} \quad (8')$$

Отметим два свойства криволинейных интегралов.

Из определения криволинейного интеграла следует, что если существует интеграл

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

то существует и интеграл

$$\int_{BA} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

причем

$$\begin{aligned} & \int_{BA} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\ & = - \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \end{aligned} \quad (I)$$

Это свойство криволинейного интеграла подтверждается также и формулой (8). Действительно, изменение в криволинейном интеграле направления пути интегрирования на противоположное вызывает только перестановку пределов в определенном интеграле, выражающем этот криволинейный интеграл, а от этого меняется только знак интеграла.

Из свойства (I) криволинейного интеграла вытекает, что если требуется вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру, то, кроме контура, должно быть дано и направление интегрирования по этому контуру.

Непосредственно из определения криволинейного интеграла следует, что

$$\begin{aligned} & \int_{c_1+c_2} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\ & = \int_{c_1} P(x, y) dx + Q(x, y) dy + \int_{c_2} P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \end{aligned} \quad (II)$$

если только интегралы по кривым c_1 и c_2 и по кривой $c_1 + c_2$, состоящей из двух частей c_1 и c_2 , существуют.

Это свойство криволинейного интеграла подтверждается и формулой (8), вследствие аддитивного свойства определенного интеграла от функции одной переменной:

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^c F(x) dx + \int_c^b F(x) dx.$$

Если сформулированные выше условия существования криволинейного интеграла от $Pdx + Qdy$ по кривой $c_1 + c_2$ не выполнены, но они выполнены отдельно на участках c_1 и c_2 , то, принимая во внимание свойство (II), естественно определить криволинейный интеграл от $Pdx + Qdy$ по кривой $c_1 + c_2$ как сумму интегралов от $Pdx + Qdy$ отдельно по кривой c_1 и по кривой c_2 .

Такое определение позволяет нам рассматривать криволинейные интегралы не только по гладким кривым, но и по кусочно гладким кривым. (Кривая называется гладкой, если в каждой ее точке существует касательная, которая при движении точки касания вдоль кривой меняет свое положение непрерывно; кривая называется кусочно гладкой, если она состоит из конечного числа гладких дуг.)

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл

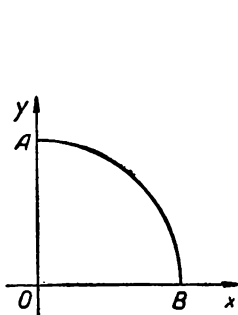
$$\int_{AB} ydx - xdy$$

по первой четверти AB окружности

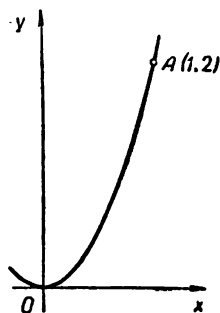
$$x = r \cos t,$$

$$y = r \sin t,$$

где A — точка на оси Oy , а B — на оси Ox (черт. 49).



Черт. 49



Черт. 50

Решение. Так как при движении точки по первой четверти окружности от A до B параметр t убывает от $\frac{\pi}{2}$ до 0, то согласно формуле (8) имеем:

$$\begin{aligned} \int_{AB} ydx - xdy &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 [(r \sin t)(r \cos t)' - (r \cos t)(r \sin t)'] dt = \\ &= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi r^2}{2}. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{OA} xy^2 dx + x^2 y dy,$$

где OA — дуга параболы

$$y = 2x^2$$

от начала координат O до точки $A(1, 2)$ (черт. 50).

Решение. Здесь за параметр принимаем x , поэтому, пользуясь формулой (8'), получим:

$$\begin{aligned} \int_{OA} xy^2 dx + x^2 y dy &= \int_0^1 [x(2x^2)^2 + x^2(2x^2)(2x^2)'] dx = \\ &= 12 \int_0^1 x^5 dx = 2x^6 \Big|_0^1 = 2. \end{aligned}$$

§ 4. Формула Грина

В этом параграфе мы установим связь между двумя интегралами, один из которых — криволинейный, взятый по замкнутому контуру, а другой — двойной, взятый по области, ограниченной этим контуром.

Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны и имеют непрерывные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ внутри и на границе области g , ограниченной замкнутой кусочно гладкой кривой Γ .

Докажем, что имеет место равенство

$$\iint_g \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad (1)$$

где, как и везде в дальнейшем, символ $\int_{\Gamma}$ означает интегрирование по замкнутому контуру Γ в положительном направлении, которое определяется тем, что при движении в этом направлении область g , ограниченная контуром Γ , остается слева.

Сначала рассмотрим случай, когда контур Γ пересекается прямыми, параллельными осям координат, не более

чем в двух точках, а также может иметь прямолинейные отрезки, параллельные координатным осям (черт. 51).

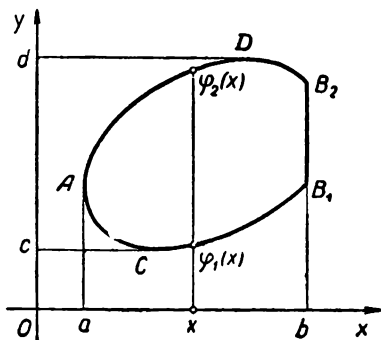
Пусть проекция контура Γ на ось Ox есть отрезок $[a, b]$. Проведя прямые $x=a$ и $x=b$, между которыми расположен контур Γ , мы выделим из контура Γ на нижнюю часть — ACB_1 и верхнюю часть — ADB_2 .

Пусть уравнение кривой ACB_1 есть

$$y = \varphi_1(x),$$

а уравнение кривой ADB_2 —

$$y = \varphi_2(x).$$



Черт. 51

Вычисляя двойной интеграл $\iint_{\Gamma} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$ путем двух последовательных простых интегрирований, мы получим:

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \\ &= \int_a^b \{ P[x, \varphi_2(x)] - P[x, \varphi_1(x)] \} dx = \\ &= \int_a^b P[x, \varphi_2(x)] dx - \int_a^b P[x, \varphi_1(x)] dx. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} \int_a^b P[x, \varphi_2(x)] dx &= \int_{ADB_2} P(x, y) dx, \\ \int_a^b P[x, \varphi_1(x)] dx &= \int_{B_1CA} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\int_{B_2B_1} P(x, y) dx = 0,$$

так как на отрезке B_2B_1 имеем $x = \text{const}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \iint_g \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_{ADB_2} P(x, y) dx + \int_{B_2B_1} P(x, y) dx + \\ &+ \int_{B_1CA} P(x, y) dx = \int_{ADB_2 + B_2B_1 + B_1CA} P(x, y) dx = - \int_{\Gamma} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

Итак, имеем:

$$\iint_g \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{\Gamma} P(x, y) dx. \quad (2)$$

Аналогичным путем получим:

$$\iint_g \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{\Gamma} Q(x, y) dy. \quad (3)$$

Вычтя из левой и правой частей равенства (3) соответствующие части равенства (2), мы получим соотношение (1), которое называется формулой Грина.

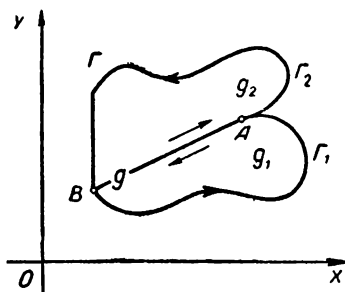
Рассмотрим случай, когда некоторые части контура Γ , ограничивающего область g прямыми, параллельными осям координат, пересекаются более чем в двух точках.

В этом случае сначала область g мы разделим на такие частичные области, границы которых будут рассмотренного выше вида. Пусть

для простоты область g достаточно разбить на две частичные области g_1 и g_2 , соединяя, как показано на чертеже 52, две точки A и B контура Γ отрезком AB . Затем напишем формулу Грина для каждой частичной области:

$$\iint_{g_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma_1 + AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad (4)$$

$$\iint_{g_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma_2 + BA} P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad (5)$$



Черт. 52

где Γ_1 и Γ_2 — две части, на которые разбивается контур Γ точками A и B . Наконец, сложим отдельно левые части и отдельно правые части формул Грина для частичных областей. Учитывая, что по общей части границ частичных областей (в нашем случае это — отрезок AB), которая проходит внутри области g и не входит в состав контура Γ , криволинейный интеграл берется дважды: сначала в одном направлении (от A к B), а затем в противоположном (от B к A), мы опять получим формулу Грина (1) для данной области g .

Формула Грина верна и в том случае, когда область g ограничена несколькими замкнутыми контурами.

Рассмотрим, например, случай, когда граница Γ области g состоит из двух замкнутых контуров Γ_1 и Γ_2 (черт. 53). Отрезком AB соединим внутренний контур Γ_2 с внешним контуром Γ_1 . Тогда область g мы можем рассматривать как область, ограниченную одним замкнутым контуром $AB + \Gamma_1 + BA + \Gamma_2$. Поэтому

$$\iint_g \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{AB + \Gamma_1 + BA + \Gamma_2} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

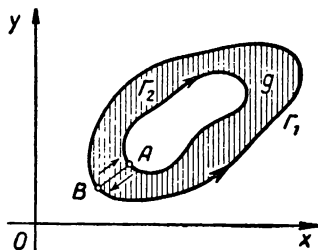
Отсюда, учитывая, что

$$\int_{AB + BA} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0,$$

получим:

$$\iint_g \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad (6)$$

где интегрирование по Γ_1 ведется в направлении против движения часовой стрелки, а по Γ_2 — в направлении движения часовой стрелки. Заменяя в равенстве (6) $\Gamma_1 + \Gamma_2$ через Γ , мы опять получим формулу Грина (1), причем интегрирование по Γ и в этом случае ведется в положительном направлении, т. е. так, что при движении по Γ в этом направлении ближайшая часть области g остается слева.



Черт. 53

§ 5. Площадь плоской фигуры

Внутри и на границе области g , ограниченной замкнутой кусочно гладкой кривой Γ , возьмем функции:

$$P = -y, \quad Q = x.$$

К этим функциям применима формула Грина, так как они непрерывны вместе с производными

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Воспользовавшись формулой Грина, получим:

$$\oint_g 2dx dy = \int_{\Gamma} -y dx + x dy.$$

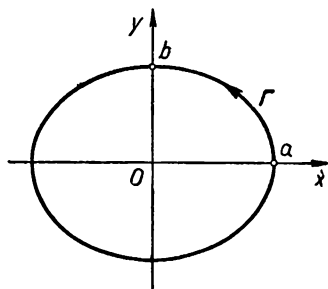
Отсюда следует, что площадь плоской фигуры g , равная

$$S = \iint_g dx dy,$$

выражается при помощи криволинейного интеграла по контуру Γ , ограничивающему эту фигуру, формулой

$$S = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} x dy - y dx.$$

Пример. Вычислить площадь области, ограниченной эллипсом (черт. 54).



Черт. 54

Решение. Обозначим полуоси эллипса через a и b и напишем уравнение эллипса в параметрической форме:

$$\begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= b \sin t. \end{aligned}$$

Вся искомая площадь равна

$$S = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} x dy - y dx,$$

где криволинейный интеграл берется по эллипсу в положительном направлении, что соответствует изменению параметра t от 0 до 2π .

Поэтому

$$S = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} x dy - y dx = \\ = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a \cos t \cdot b \cos t - b \sin t (-a \sin t)] dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

§ 6. Условие независимости криволинейного интеграла от формы пути интегрирования

Как увидим дальше, вопрос об условии независимости криволинейного интеграла от формы кривой, соединяющей начало и конец пути интегрирования, целиком сводится к вопросу об условии равенства нулю интеграла по замкнутому контуру. Этот второй вопрос мы и рассмотрим здесь прежде всего.

Теорема. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в области g непрерывны и имеют непрерывные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Для того чтобы криволинейный интеграл $\int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ по любому замкнутому кусочно гладкому контуру Γ , лежащему в области g вместе с содержащейся внутри него областью, был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы в области g имело место тождество $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Достаточность прямо следует из формулы Грина, которая при данных условиях верна.

В самом деле, если Γ — какой угодно кусочно гладкий замкнутый контур, который лежит в области g и ограничивает область $g' \subset g$, то при выполнении в области g условия $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ имеем:

$$\int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_{g'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Необходимость. Пусть дано, что

$$\int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

для любого кусочно гладкого замкнутого контура, лежащего в области g вместе с содержащейся внутри него

областью. Докажем, что в каждой точке g верно равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Проведем доказательство методом рассуждений от противного.

Допустим, что $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ по крайней мере в одной точке $M_0(x_0, y_0)$ области g .

Пусть для определенности $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)} > \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)}$.

Тогда

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)} > 0.$$

Выберем число c таким, чтобы было верно

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)} > c > 0.$$

В силу плотности множества действительных чисел такое число c найдется.

Так как функция $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывна в области g и, в частности, в точке $M_0(x_0, y_0)$, то найдется такая окрестность D точки $M_0(x_0, y_0)$, что неравенство

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > c \quad (1)$$

будет верно не только в точке M_0 , но и во всей этой окрестности D .

Возьмем в $D \subset g$ кусочно гладкий замкнутый контур Γ , ограничивающий некоторую область g' (черт. 55). По формуле Грина имеем:

$$\int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_{g'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy. \quad (2)$$

Но в $g' \subset D$ верно неравенство (1), в силу чего

$$\iint_{g'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy > c \iint_{g'} dx dy = c \cdot S_{g'},$$

где $S_{g'}$ — площадь области g' , и поэтому $c \cdot S_{g'} > 0$. Отсюда, принимая во внимание равенство (2), мы приходим к выводу, что для выбранного контура Γ

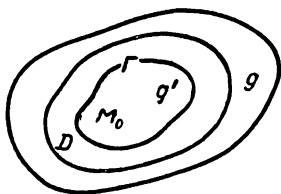
$$\int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy > 0.$$

А это противоречит условию, так как по условию интеграл от $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ равен нулю по любому замкнутому контуру в области g , следовательно, и по контуру Γ , ограничивающему $g' \subset D \subset g$.

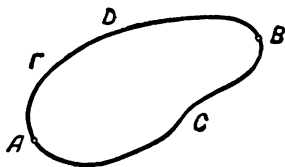
Таким образом, допущение, что $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ хотя бы в одной точке области g , неверно. Следовательно, в области g выполнено условие: $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Теорема доказана.

Следствие. Пусть в односвязной области g функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны и имеют непрерывные



Черт. 55



Черт. 56

производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Для того чтобы криволинейный интеграл

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

не зависел от формы пути, т. е. имел бы одно и то же значение, какой бы кусочно гладкой кривой AB , лежащей в области g , ни были соединены начало A и конец B пути, необходимо и достаточно, чтобы в области g имело место тождество

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

В самом деле, пусть в области g интеграл $\int_{AB} Pdx + Qdy$

не зависит от формы пути AB . Возьмем в области g произвольный кусочно гладкий замкнутый контур Γ (черт. 56). Разобьем его на две части: ACB и ADB . Так как по условию интеграл не зависит от формы пути, то

$$\int_{ACB} Pdx + Qdy = \int_{ADB} Pdx + Qdy.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} Pdx + Qdy &= \int_{ACB} Pdx + Qdy + \int_{BDA} Pdx + Qdy = \\ &= \int_{ACB} Pdx + Qdy - \int_{ADB} Pdx + Qdy = 0.\end{aligned}$$

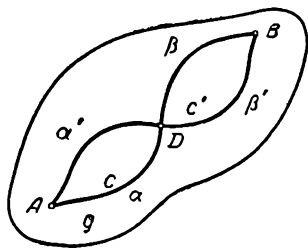
Итак,

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy = 0$$

для любого кусочно гладкого замкнутого контура Γ в области g . Следовательно, по доказанной выше теореме в области g имеем тождество $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Необходимость доказана.

Пусть в области g верно тождество $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Возьмем любые две кусочно гладкие кривые c и c' , лежащие



Черт. 57

в области g и соединяющие произвольно выбранные точки $A \in g$ и $B \in g$. Для большей общности допустим, что кривые c и c' пересекаются в некоторой точке D (черт. 57), образуя два замкнутых контура $A\alpha D\alpha'A$ и $D\beta'B\beta D$. Области, ограниченные этими контурами, содержатся в g , так как по условию область g односвязна.

Поэтому согласно доказанной выше теореме из тождества $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ вытекает, что

$$\int_{A\alpha D\alpha'A} Pdx + Qdy = 0, \quad (3)$$

$$\int_{D\beta'B\beta D} Pdx + Qdy = 0. \quad (4)$$

Но

$$\begin{aligned}\int_{A\alpha D\alpha'A} Pdx + Qdy &= \int_{A\alpha D} Pdx + Qdy + \int_{D\alpha'A} Pdx + Qdy = \\ &= \int_{A\alpha D} Pdx + Qdy - \int_{A\alpha'D} Pdx + Qdy;\end{aligned}$$

поэтому в силу равенства (3) имеем:

$$\int_{A\alpha D} Pdx + Qdy = \int_{A\alpha'D} Pdx + Qdy. \quad (5)$$

Аналогичным путем получим:

$$\int_{D\beta B} Pdx + Qdy = \int_{D\beta'B} Pdx + Qdy. \quad (6)$$

Из соотношений (5) и (6), складывая отдельно левые и правые части, получим:

$$\int_{A\alpha D + D\beta B} Pdx + Qdy = \int_{A\alpha'D + D\beta'B} Pdx + Qdy,$$

или, что то же:

$$\int_c Pdx + Qdy = \int_{c'} Pdx + Qdy.$$

Это и означает, что интеграл от $Pdx + Qdy$ не зависит от формы пути.

Достаточность доказана.

§ 7. Условия полного дифференциала

Если функция $F(x, y)$ в области g дифференцируема, то она имеет полный дифференциал, который выражается формулой

$$dF(x, y) = F'_x(x, y) dx + F'_y(x, y) dy \quad (1)$$

и представляет выражение вида

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (2)$$

Возникает вопрос, всегда ли выражение вида (2) является полным дифференциалом некоторой функции. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. Пусть в односвязной области g функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны и имеют непрерывные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Для того чтобы в области g выражение $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ было полным дифференциалом

некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы в этой области имело место тождество $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Необходимость. Пусть выражение (2) в области g является полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$. Тогда, учитывая формулу полного дифференциала (1), мы имеем тождество:

$$F'_x(x, y) dx + F'_y(x, y) dy = P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad (3)$$

где dx и dy — произвольные приращения независимых переменных x и y . Взяв в (3) $dx \neq 0$ и $dy = 0$, мы получим:

$$F'_x(x, y) dx = P(x, y) dx$$

и, следовательно,

$$F'_x(x, y) = P(x, y). \quad (4)$$

Выбрав затем $dx = 0$ и $dy \neq 0$, найдем:

$$F'_y(x, y) = Q(x, y). \quad (5)$$

Дифференцируя обе части равенства (4) по y , а равенства (5) по x , получим:

$$F''_{xy}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y} \text{ и } F''_{yx}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (6)$$

В силу непрерывности производных $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в области g , что дано по условию, из соотношений (6) вытекает, что в области g смешанные производные $F''_{xy}(x, y)$ и $F''_{yx}(x, y)$ непрерывны и, следовательно, равны между собой (гл. I, § 7). Наконец, из совпадения левых частей равенств (6) следует и совпадение правых частей этих равенств, т. е. тождество

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

в области g .

Необходимость доказана.

Обратим внимание на то, что доказательство необходимости не требует, чтобы область g была непременно односвязной.

Достаточность. Пусть в области g имеет место тождество $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда криволинейный интеграл

$\int_{AB} P dx + Q dy$ не зависит от формы пути интегрирования

и вполне определяется заданием начала A и конца B пути интегрирования, вследствие чего этот интеграл по любой кусочно гладкой кривой AB мы будем выражать символом $\int_A^B Pdx + Qdy$.

Пусть началом пути интегрирования является фиксированная точка (x_0, y_0) , а конец пути есть переменная точка (x, y) области g . Тогда интеграл

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$$

есть функция от x и y , определенная в области g .

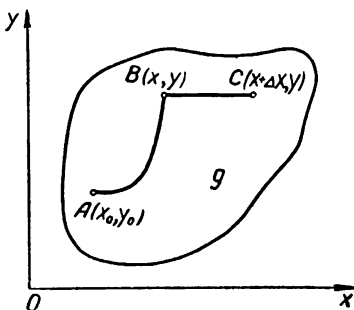
Положим,

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (7)$$

Докажем, что в области g функция $F(x, y)$ имеет частные производные.

В самом деле, приращению Δx , удовлетворяющему только одному требованию — точка $(x + \Delta x, y)$ содержится в области g , соответствует приращение функции $F(x, y)$, которое равно

$$\begin{aligned} \Delta_x F &= F(x + \Delta x, y) - F(x, y) = \\ &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x + \Delta x, y)} P dx + Q dy - \\ &\quad - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy. \end{aligned}$$



Черт. 58

Так как интегралы в правой части не зависят от формы

пути, то путь интегрирования от $A(x_0, y_0)$ до $C(x + \Delta x, y)$ мы можем провести через точку $B(x, y)$, соединив при этом точки B и C отрезком прямой BC (черт. 58). Поэтому

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x + \Delta x, y)} Pdx + Qdy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy + \int_{B(x, y)}^{C(x + \Delta x, y)} Pdx + Qdy$$

и, следовательно,

$$\Delta_x F = \int_{B(x, y)}^{C(x + \Delta x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Учитывая, что вдоль отрезка BC y является постоянным, имеем:

$$\int_{B(x, y)}^{C(x + \Delta x, y)} Q(x, y) dy = 0.$$

Поэтому

$$\Delta_x F = \int_{B(x, y)}^{C(x + \Delta x, y)} P(x, y) dx. \quad (8)$$

Выразив криволинейный интеграл (8) при помощи обыкновенного определенного интеграла и воспользовавшись затем теоремой о среднем, получим:

$$\Delta_x F = \int_x^{x + \Delta x} P(x, y) dx = \Delta x \cdot P(x + \theta \Delta x, y), \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Отсюда найдем:

$$\frac{\Delta_x F}{\Delta x} = P(x + \theta \Delta x, y).$$

В силу непрерывности функции $P(x, y)$ в любой точке $B(x, y)$ области g имеем:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x + \theta \Delta x, y) = P(x, y),$$

откуда следует, что при $\Delta x \rightarrow 0$ отношение $\frac{\Delta_x F}{\Delta x}$ имеет предел и

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x F}{\Delta x} = P(x, y).$$

Это означает, что функция $F(x, y)$ в любой точке (x, y) области g имеет частную производную по x и

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y). \quad (9)$$

Подобным образом доказывается, что функция $F(x, y)$ в любой точке области g имеет частную производную по y и

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y). \quad (10)$$

Так как в области g по условию функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны, то из соотношений (9) и (10) видно, что частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ непрерывны в области g .

Наконец, из существования в области g непрерывных частных производных $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ следует, что функция $F(x, y)$ дифференцируема в каждой точке (x, y) области g , причем в силу соотношений (9) и (10) полный дифференциал ее равен

$$dF = P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Итак, если в области g верно тождество $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то выражение $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ в этой области является полным дифференциалом от функции $F(x, y)$, определенной формулой (7).

Достаточность доказана.

Следствие. Пусть в односвязной области g функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны и имеют непрерывные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Для того чтобы криволинейный интеграл $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ не зависел от формы

пути интегрирования в области g , необходимо и достаточно, чтобы в этой области подынтегральное выражение $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ было полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$.

В самом деле, необходимым и достаточным условием независимости криволинейного интеграла $\int_{AB} P dx + Q dy$ от формы пути интегрирования в области g является выполнение в этой области тождества $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Это же условие является одновременно и необходимым и достаточным условием того, чтобы подынтегральное выражение $P dx + Q dy$ в области g было полным дифференциалом некоторой функции двух переменных.

§ 8. Криволинейное интегрирование как операция, обратная дифференцированию

Пусть в односвязной области g функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны и имеют непрерывные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$, причем $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Выше было установлено, что при данных условиях функция

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (1)$$

имеет полный дифференциал, равный

$$dF = P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (2)$$

Здесь мы видим аналогию с теоремой о производной обыкновенного определенного интеграла по верхнему пределу и замечаем из формул (1) и (2), что при данных условиях криволинейное интегрирование представляет операцию, обратную дифференцированию — взятию полного дифференциала.

При данных условиях можно получить также и формулу, аналогичную формуле Ньютона — Лейбница, выражающей определенный интеграл через первообразную по отношению к подынтегральной функции.

В самом деле, пусть требуется вычислить

$$I = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Соединим точку $A(x_0, y_0)$ с точкой $B(x_1, y_1)$ гладкой кривой AB , лежащей в области g . Пусть в параметрической форме кривая AB выражается уравнениями

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}$$

где t изменяется от α до β , когда точка (x, y) описывает кривую AB .

Примем во внимание, что при данных условиях выражение $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ есть полный дифференциал

некоторой функции $F(x, y)$. Поэтому

$$\begin{aligned} I &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} dF(x, y) = \\ &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} F'_x(x, y) dx + F'_y(x, y) dy. \end{aligned}$$

Выразим криволинейный интеграл при помощи обыкновенного определенного интеграла и воспользуемся формулой Ньютона — Лейбница:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\alpha}^{\beta} \{F'_x[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + F'_y[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\} dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} F[\varphi(t), \psi(t)] dt = F[\varphi(t), \psi(t)] \Big|_{\alpha}^{\beta} = \\ &= F[\varphi(\beta), \psi(\beta)] - F[\varphi(\alpha), \psi(\alpha)] = F(x_1, y_1) - F(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Следовательно, при данных условиях мы имеем формулу:

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = F(x_1, y_1) - F(x_0, y_0), \quad (3)$$

где $F(x, y)$ — первообразная по отношению к подынтегральному выражению, т. е. функция, имеющая подынтегральное выражение своим полным дифференциалом.

§ 9. Потенциальное поле

Выше мы видели, что криволинейный интеграл

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

представляет работу силового поля

$$P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}$$

при движении материальной точки в этом поле по кривой AB .

Установлено также, что если в односвязной области g , содержащей кривую AB , функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$

непрерывны и имеют непрерывные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$, то выполнение тождества $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ в области g необходимо и достаточно, чтобы выражение $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ было полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$.

Но в случае, когда

$$dF = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y),$$

векторное поле $P(x, y) \bar{i} + Q(x, y) \bar{j}$ есть поле градиента функции $F(x, y)$, который определяется формулой

$$\text{grad } F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \bar{j}.$$

Функция $F(x, y)$, которая может быть определена в области g криволинейным интегралом

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

не зависящим в этом случае от формы пути интегрирования, называется потенциалом поля, а поле вектора $P(x, y) \bar{i} + Q(x, y) \bar{j}$ называется потенциальным полем.

Согласно формуле (3) предыдущего параграфа для потенциального поля мы имеем:

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = F(x_1, y_1) - F(x_0, y_0).$$

Это означает, что работа потенциального поля при движении материальной точки в этом поле не зависит от формы пути движения материальной точки и равна разности между значениями потенциала поля в конце пути и в начале пути.

Раздел III

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Основные понятия

В различных областях науки и техники весьма часто встречаются задачи, для решения которых требуется решить одно или несколько уравнений, содержащих производные или дифференциалы искомых функций. Такие уравнения называются дифференциальными.

Рассмотрим несколько задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.

Пример 1. На плоскости xOy найти кривую, которая в каждой своей точке имеет касательную, образующую с положительным направлением оси Ox угол, тангенс которого равен удвоенной абсциссе точки касания.

Решение. Пусть $y=f(x)$ есть уравнение искомой кривой. По условию задачи в каждой точке $M(x, f(x))$ есть касательная к этой кривой, угловой коэффициент которой, т. е. $f'(x)$, равняется $2x$. Следовательно, задача сводится к тому, чтобы найти функцию y , зависящую от x , которая удовлетворяла бы уравнению

$$\frac{dy}{dx} = 2x. \quad (1)$$

Это уравнение дифференциальное, так как оно содержит производную искомой функции.

Из уравнения (1) мы видим, что производная искомой функции равна $2x$. Поэтому сама искомая функция y есть первообразная по отношению к $2x$. Следовательно,

$$y = \int 2x \, dx + c,$$

или

$$y = x^2 + c, \quad (2)$$

где c — произвольная постоянная.

Из формулы (2) следует, что дифференциальное уравнение (1) имеет бесконечное множество решений, т. е. условиям задачи удовлетворяет не одна кривая, а бесконечное множество кривых — парабол (черт. 59).

Мы найдем одно определенное решение уравнения (1), т. е. одну определенную кривую, если будет заранее дана точка (x_0, y_0) , через которую должна пройти искомая кривая.

В самом деле, в этом случае, подставив в соотношение (2) $x = x_0$ и $y = y_0$, мы найдем:

$$c = y_0 - x_0^2.$$

Поэтому кривая, удовлетворяющая условиям задачи и проходящая через данную точку (x_0, y_0) , выражается уравнением:

$$y = x^2 + y_0 - x_0^2. \quad (3)$$

Формула (3) выражает одно определенное — частное решение уравнения (1), а соотношение (2) охватывает множество всевозможных частных решений и поэтому выражает, так сказать, общее решение уравнения (1).

Чтобы из общего решения выделить частное решение уравнения (1), надо задать начальные условия, которые заключаются в том, что при некотором значении x_0 независимой переменной x заранее дано значение y_0 искомой функции y :

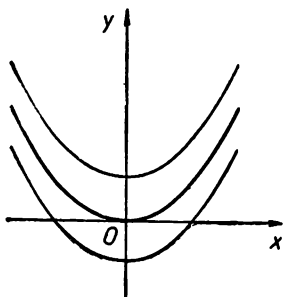
$$x = x_0, \quad y = y_0. \quad (4)$$

Пример 2. Найти закон прямолинейного движения материальной точки с постоянным ускорением, равным a .

Решение. Задача заключается в том, чтобы найти формулу, выражающую путь s , пройденный точкой за время t , как функцию от t .

Известно, что ускорение движения материальной точки есть вторая производная от пути s по времени t : $\frac{d^2s}{dt^2}$. По условию задачи мы имеем:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = a. \quad (5)$$



Черт. 59

Это уравнение — дифференциальное уравнение второго порядка, так как оно содержит вторую производную искомой функции $s(t)$.

Из уравнения (5) мы видим, что $\frac{ds}{dt}$ есть первообразная по отношению к a . Поэтому

$$\frac{ds}{dt} = at + c_1. \quad (6)$$

Отсюда следует, что s есть первообразная функция для $at + c_1$ и поэтому

$$s = \frac{at^2}{2} + c_1t + c_2. \quad (7)$$

Формула (7) выражает общее решение уравнения (5). Оно содержит две произвольные постоянные c_1 и c_2 .

Из соотношений (6) и (7) видно, что c_1 и c_2 можно найти и, следовательно, из общего решения можно выделить частное решение (выражающее одно определенное движение точки), если в некоторый момент времени $t =$

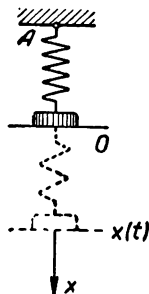
$= t_0$ — начальный момент будут известны скорость движения: $\frac{ds}{dt} = v_0$ — начальная скорость и расстояние точки от начала пути: $s = s_0$ — начальное положение точки.

Таким образом, начальные условия для уравнения (5) следующие: при $t = t_0$ имеем $s = s_0$, $\frac{ds}{dt} = v_0$, где s_0 и v_0 — данные числа.

Пример 3. Рассмотрим следующую задачу.

Тело массы m подвешено на пружине. В положении равновесия вес груза уравновешивается силой пружины. Требуется найти уравнение колебаний данного тела около точки равновесия, которые возникнут под действием восстанавливающей силы пружины, пропорциональной растяжению пружины, если тело вывести из положения равновесия. (Соппротивление среды считать равным нулю.)

Решение. Величину отклонения тела от положения равновесия (черт. 60) обозначим через x , считая ее положительной при отклонении вниз и отрицательной при отклонении вверх.



Черт. 60

Чтобы составить уравнение колебательного движения данного тела, мы воспользуемся известным в механике законом Ньютона: произведение массы тела на ускорение движения этого тела равно сумме всех действующих на тело сил.

В нашей задаче тело имеет массу m , ускорение равно $\frac{d^2x}{dt^2}$ — второй производной отклонения (пути) x по времени t и на тело действует только одна восстанавливающая сила пружины, которая равна — k^2x , где k^2 — коэффициент пропорциональности, а знак минус объясняется тем, что эта сила, всегда направленная к точке равновесия, отрицательна при $x > 0$ и положительна при $x < 0$.

Следовательно, на основании закона Ньютона имеем:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x,$$

или, разделив обе части на m и обозначив $\frac{k^2}{m}$ через ν^2 :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \nu^2x = 0. \quad (8)$$

Мы получили дифференциальное уравнение второго порядка. Общее решение его выражается формулой:

$$x = c_1 \cos \nu t + c_2 \sin \nu t, \quad (9)$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные. (В том, что формула (9) при любых значениях постоянных c_1 и c_2 выражает решение дифференциального уравнения (8), можно убедиться проверкой; метод решения дифференциальных уравнений такого вида будет рассмотрен в VI главе.)

Чтобы из общего решения (9) выделить частное решение, должны быть даны начальные условия. Для уравнения (8) второго порядка они представляют задание

$$\text{при } t = t_0 \text{ значений } x = x_0, \quad x' = x'_0,$$

т. е. задание в некоторый момент времени t_0 положения данного тела и скорости движения тела в этот момент — начального положения и начальной скорости тела.

Дополним условия нашей задачи указанием на то, что данное тело из положения равновесия было оттянуто вниз на расстояние, равное a , и затем отпущено. Кроме того, условимся время t отсчитывать с момента возникновения движения.

Аналитически эти условия означают задание следующих начальных условий:

$$\text{при } t = 0 \text{ имеем } x = a, \quad x' = 0, \quad (10)$$

Чтобы найти частное решение уравнения (8), удовлетворяющее начальным условиям (10), поступим следующим образом. В общем решении (9) и его производной

$$x' = -c_1 v \sin vt + c_2 v \cos vt$$

положим $t=0$ и полученные результаты приравняем согласно условиям (10) числам соответственно a и 0 . Таким путем найдем:

$$c_1 = a, \quad c_2 = 0.$$

Подставив в общее решение (9) значения $c_1 = a$ и $c_2 = 0$, мы получим искомое частное решение:

$$x = a \cos vt. \quad (11)$$

Формула (11) показывает, что движение данного тела при заданных условиях, включая и условия (10), представляет незатухающие колебания около точки равновесия с наибольшим отклонением от положения равновесия вниз и вверх на расстояние, равное a .

Наконец, заметим, что если под действием возмущающей силы точка A подвеса пружины колеблется по вертикали около точки своего начального положения и эти колебания выражаются функцией $b \sin \omega t$, то растяжение пружины равно $x - b \sin \omega t$; поэтому дифференциальное уравнение колебания данного тела в этом случае будет

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 [x(t) - b \sin \omega t]$$

или, разделив на m и обозначив $v^2 = \frac{k^2}{m}$ и $\mu = \frac{k^2 b}{m}$,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + v^2 x = \mu \sin \omega t.$$

Метод решения уравнений такого вида также будет дан в главе VI.

Уравнение вида

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

содержащее первую производную $\frac{dy}{dx}$ от функции $y = y(x)$, называется дифференциальным уравнением первого порядка.

Для уравнений первого порядка верна следующая

Теорема. Пусть дано уравнение

$$y' = f(x, y). \quad (I)$$

Если в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет ограниченную частную производную $f'_y(x, y)$, то найдется отрезок $[x_0 - h, x_0 + h]$, на котором существует единственная непрерывная функция $y = y(x)$, удовлетворяющая уравнению (I) и условию:

$$y(x_0) = y_0. \quad (II)$$

Доказательство этой теоремы (при более общих условиях) будет дано дальше.

Таким образом, если условия теоремы выполнены, то задача отыскания решения уравнения (I), удовлетворяющего условию (II), так называемая задача Коши, имеет единственное решение.

Решение уравнения (I), удовлетворяющее условию (II), называется частным решением уравнения (I).

Равенство (II) выражает начальное условие (начальные данные) для уравнения (I).

Если функция $\varphi(x)$ есть решение уравнения (I), то кривая $y = \varphi(x)$ называется интегральной кривой уравнения (I).

Задание начального условия (II) для уравнения (I) означает задание точки (x_0, y_0) , через которую должна пройти искомая интегральная кривая.

Если в начальном условии (II) при фиксированном x_0 мы будем брать различные значения y_0 , то мы будем получать различные частные решения уравнения (I). Множество всех частных решений дифференциального уравнения образует общее решение этого уравнения.

Геометрически общее решение выражается множеством, или, как принято говорить, семейством интегральных кривых. Это семейство кривых зависит от одного параметра, так как при данном значении $x = x_0$ каждая кривая семейства определяется значением одного параметра y_0 .

Отсюда видно, что семейство интегральных кривых и, значит, общее решение уравнения (I) выражается соотношением вида

$$y = \varphi(x, c),$$

где c — произвольная (в некоторых границах) постоянная.

Соотношение вида

$$\Phi(x, y, c) = 0,$$

которое выражает общее решение уравнения (I) в неявной форме, мы будем называть общим интегралом уравнения (I). Если общий интеграл уравнения найден, то уравнение считается решенным.

Задачу решения дифференциального уравнения часто называют задачей интегрирования дифференциального уравнения.

ГЛАВА I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШИМЫЕ В КВАДРАТУРАХ

§ 1. Уравнения в полных дифференциалах

Дифференциальное уравнение вида

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если левая часть его есть полный дифференциал некоторой функции.

Выше было показано (раздел II, гл. IV, § 7), что необходимым и достаточным условием того, чтобы выражение $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ было полным дифференциалом некоторой функции двух переменных, является выполнение тождества $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Поэтому признаком, показывающим, что уравнение (1) есть уравнение в полных дифференциалах, является тождество

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (2)$$

Пусть условие (2) выполнено и, следовательно, уравнение (1) есть уравнение в полных дифференциалах.

Допустим, что мы нашли функцию $F(x, y)$, которая имеет полный дифференциал $dF(x, y)$, совпадающий с ле-

вой частью данного уравнения (1). Тогда это уравнение (1) можно представить в виде

$$dF(x, y) = 0. \quad (1')$$

Функция $y(x)$ есть решение уравнения (1'), если только $dF[x, y(x)] \equiv 0$.

Но это тождество является необходимым и достаточным условием постоянства функции $F[x, y(x)]$. Следовательно, совокупность всех частных решений, т. е. общее решение, уравнения (1') и, значит, уравнения (1) выражается соотношением

$$F(x, y) = c, \quad (3)$$

где c — произвольная постоянная.

Таким образом, чтобы проинтегрировать уравнение в полных дифференциалах, надо найти функцию, имеющую полный дифференциал, совпадающий с левой частью данного уравнения, и приравнять ее произвольной постоянной.

Задача отыскания функции $F(x, y)$ по ее полному дифференциалу $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, к которой приводится интегрирование уравнения в полных дифференциалах, решается, как уже известно, в квадратурах. На практике эту задачу решают следующим путем.

Так как для искомой функции $F(x, y)$ мы имеем:

$$dF(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad (4)$$

но в то же время

$$dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy,$$

то функция $F(x, y)$ должна быть построена с учетом двух требований: 1) $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y)$ и 2) $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$. Все функции, удовлетворяющие первому требованию, выражаются формулой

$$F(x, y) = \int P(x, y) dx + \varphi(y), \quad (5)$$

где $\varphi(y)$ — произвольная функция от y , не зависящая от x . Остается выбрать $\varphi(y)$ так, чтобы функция $F(x, y)$ удовлетворяла и второму требованию. Для этого надо взять производную

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx + \varphi'(y),$$

приравнять ее к функции $Q(x, y)$ и из полученного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx + \varphi'(y) = Q(x, y) \quad (6)$$

найти $\varphi'(y)$, а затем интегрированием найти и функцию $\varphi(y)$. (Так как по условию функция $F(x, y)$, удовлетворяющая соотношению (4), существует и она содержится среди функций, выраженных формулой (5), то существует и функция $\varphi(y)$, производная которой $\varphi'(y)$ определяется равенством (6), поэтому равенство (6) после упрощений не будет содержать x .)

Пример. Решить уравнение

$$2x \cos y dx + (y^3 - x^3 \sin y) dy = 0.$$

Решение. Здесь

$$P(x, y) = 2x \cos y, \quad Q(x, y) = y^3 - x^3 \sin y.$$

Так как

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2x \sin y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x \sin y$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

то мы имеем уравнение в полных дифференциалах.

Обозначим через $F(x, y)$ функцию, полный дифференциал которой есть левая часть данного уравнения. Тогда

$$F(x, y) = \int 2x \cos y dx + \varphi(y) = x^2 \cos y + \varphi(y).$$

Для определения функции $\varphi(y)$ возьмем производную

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -x^2 \sin y + \varphi'(y),$$

приравняем ее к функции $Q(x, y) = y^3 - x^3 \sin y$ и из полученного уравнения

$$-x^2 \sin y + \varphi'(y) = y^3 - x^3 \sin y$$

найдем

$$\varphi'(y) = y^3.$$

Отсюда получим:

$$\varphi(y) = \int y^3 dy + c_1 = \frac{y^4}{4} + c_1.$$

где c_1 — произвольная постоянная. Следовательно,

$$F(x, y) = x^3 \cos y + \frac{y^3}{3} + c_1,$$

а общий интеграл данного уравнения есть

$$x^3 \cos y + \frac{y^3}{3} + c_1 = c_2,$$

или

$$3x^3 \cos y + y^3 = 3(c_2 - c_1),$$

где c_2 — произвольная постоянная.

Вместе с c_1 и c_2 произвольной постоянной является и величина $3(c_2 - c_1)$. Обозначим ее через c . Тогда общий интеграл данного уравнения выразится соотношением

$$3x^3 \cos y + y^3 = c,$$

где c — произвольная постоянная.

§ 2. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида

$$P(x) dx + Q(y) dy = 0 \quad (1)$$

называется уравнением с разделенными переменными.

Замечаем, что

$$\frac{\partial P(x)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Q(y)}{\partial x} = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial P(x)}{\partial y} = \frac{\partial Q(y)}{\partial x}.$$

Поэтому для интегрирования уравнения с разделенными переменными мы можем применить способ интегрирования уравнений в полных дифференциалах.

Составим функцию $F(x, y)$, полный дифференциал которой совпадает с левой частью данного уравнения (1). Для этого воспользуемся формулой

$$F(x, y) = \int P(x) dx + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ пока неопределенная функция от y . Затем возьмем производную

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int P(x) dx + \varphi'(y) = \varphi'(y)$$

и приравняем ее функции $Q(y)$. В результате получим:

$$\varphi'(y) = Q(y).$$

Отсюда найдем

$$\varphi(y) = \int Q(y) dy$$

и подставим в формулу для $F(x, y)$:

$$F(x, y) = \int P(x) dx + \int Q(y) dy.$$

Наконец, приравняв найденное здесь выражение для функции $F(x, y)$ произвольной постоянной c , мы получим соотношение

$$\int P(x) dx + \int Q(y) dy = c, \quad (2)$$

представляющее общий интеграл данного уравнения (1).

Таким образом, соотношение (2) служит формулой для составления общего интеграла уравнения (1) с разделенными переменными.

Уравнение вида

$$P(x)Q(y)dx + P_1(x)Q_1(y)dy = 0 \quad (3)$$

называется уравнением с разделяющимися переменными, так как почленным делением на $P_1(x)Q(y)$ приводится к уравнению

$$\frac{P(x)}{P_1(x)} dx + \frac{Q_1(y)}{Q(y)} dy = 0, \quad (3')$$

в котором переменные разделены.

Общий интеграл уравнения (3') выражается соотношением

$$\int \frac{P(x)}{P_1(x)} dx + \int \frac{Q_1(y)}{Q(y)} dy = c, \quad (4)$$

где c — произвольная постоянная. Этим же соотношением выражается и общий интеграл исходного уравнения (3), так как всякое решение уравнения (3') удовлетворяет и уравнению (3). Кроме того, следует рассмотреть и уравнения

$$Q(y) = 0 \text{ и } P_1(x) = 0.$$

Может оказаться, что они тоже выражают некоторые решения исходного уравнения (3), не содержащиеся в общем интеграле (4), так как уравнение (3') было получено из уравнения (3) делением на функции $Q(y)$ и $P_1(x)$.

Проверка показывает, что всякое решение $y=y_0$ уравнения $Q(y)=0$ удовлетворяет и данному дифференциальному уравнению (3), потому что $Q(y_0)=0$ и $dy_0=0$. Удовлетворяет уравнению (3) и любое решение $x=x_0$ уравнения $P_1(x)=0$, ибо $dx_0=0$ и $P_1(x_0)=0$. Следовательно, прямые $x=x_0$ и $y=y_0$ являются интегральными линиями уравнения (3), если даже они и не содержатся в семействе интегральных линий, которое выражается общим интегралом.

Пример 1. Найти общий интеграл уравнения

$$x(1+y^2)dx + (1+x^2)ydy = 0.$$

Решение. Здесь мы имеем уравнение с разделяющимися переменными, так как каждый множитель в выражениях, стоящих при dx и dy , зависит только от одной переменной. Для разделения переменных надо разделить уравнение на $(1+x^2)(1+y^2)$.

После деления получим:

$$\frac{xdx}{1+x^2} + \frac{ydy}{1+y^2} = 0.$$

Следовательно, искомый общий интеграл выражается соотношением

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} + \int \frac{ydy}{1+y^2} = c.$$

Вычислив входящие сюда интегралы, получим:

$$\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \ln(1+y^2) = c.$$

Умножив обе части этого равенства на 2 и представив произвольную постоянную $2c$ в виде $\ln c$, запишем общий интеграл данного уравнения сначала в виде

$$\ln(1+x^2) + \ln(1+y^2) = \ln c,$$

а затем окончательно в виде

$$(1+x^2)(1+y^2) = c.$$

Пример 2. Установлено, что при погружении тела в жидкость сопротивление можно считать пропорциональным скорости, если только скорость не очень большая.

Найти закон движения материальной точки массы m , погружающейся в жидкость под действием силы тяжести без начальной скорости.

Решение. Пусть t — время, отсчитываемое с момента начала движения материальной точки, а $s(t)$ — путь (погружение) точки за время t , который мы будем считать положительным книзу. Скорость в момент t обозначим через $v(t)$.

По условию $v(0) = 0$.

Для составления уравнения движения воспользуемся законом механики: произведение массы материальной точки на ускорение движения этой точки равно сумме действующих на точку сил.

По условию масса точки равна m . Ускорение, как известно, равно $\frac{dv}{dt}$.

На данную материальную точку действуют две силы:

- 1) вес точки, равный mg , где g — ускорение силы тяжести,
- 2) сопротивление среды, которое по условию равно kv , где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности.

При сложении этих сил надо учитывать и их направление. Вес направлен вниз, т. е. в сторону движения тела, а сопротивление среды — в противоположную сторону, вверх.

Поэтому

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv.$$

Мы получили дифференциальное уравнение первого порядка относительно скорости $v(t)$. Переменные v и t в этом уравнении разделяются:

$$\frac{mdv}{mg - kv} = dt.$$

Интегрируя, получим:

$$-\frac{m}{k} \ln (mg - kv) = t + c,$$

или, обозначив $-\frac{k}{m} c$ через c_1 ,

$$\ln (mg - kv) = -\frac{k}{m} t + c_1.$$

Из этого соотношения, пользуясь условием, что при $t=0$ скорость $v=0$, мы найдем:

$$c_1 = \ln(mg).$$

Следовательно,

$$\ln(mg - kv) = -\frac{k}{m}t + \ln(mg)$$

и

$$v = \frac{mg}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}).$$

Учитывая, что $v = \frac{ds}{dt}$, получим:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Интегрируем это уравнение:

$$s = \frac{mg}{k}t + \frac{m^2g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t} + c_2.$$

Отсюда, пользуясь тем, что при $t=0$ путь $s=0$, найдем:

$$c_2 = -\frac{m^2g}{k^2}.$$

Следовательно, движение материальной точки при данных условиях будет выражаться формулой:

$$s = \frac{m^2g}{k^2} \left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right) + \frac{mg}{k}t.$$

§ 3. Однородные уравнения

Функция $f(x, y)$, удовлетворяющая условию

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y),$$

называется однородной функцией n -й степени.

Докажем следующие два утверждения.

1°. Если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однородные функции одной и той же степени n , то

$$f(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

есть однородная функция нулевой степени.

Действительно,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{P(\lambda x, \lambda y)}{Q(\lambda x, \lambda y)} = \frac{\lambda^n P(x, y)}{\lambda^n Q(x, y)} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = f(x, y).$$

Полученное равенство $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ можно представить так:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y).$$

Это и доказывает, что $f(x, y)$ — однородная функция нулевой степени.

2°. Если $f(x, y)$ есть однородная функция нулевой степени, то она зависит только от отношения переменных x и y .

В самом деле, пусть

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y).$$

Тогда, взяв $\lambda = \frac{1}{x}$, получим:

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(x, y).$$

Очевидно, $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ есть некоторая функция от $\frac{y}{x}$. Обозначив ее через $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, получим:

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

что и доказывает наше утверждение.

Дифференциальное уравнение вида

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

называется однородным, если в этом уравнении $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однородные функции одной и той же степени.

Уравнение (1) можно преобразовать к виду

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}.$$

Если уравнение (1) однородное, то в силу доказанных выше утверждений 1° и 2° функция $-\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ представляет некоторую функцию $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ от отношения пере-

менных x и y . Поэтому однородное уравнение всегда можно привести к виду

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (1')$$

Ясно, что разделение переменных здесь возможно только в некоторых частных случаях относительно функции $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. В том случае, когда переменные не разделяются, мы попытаемся упростить данное уравнение (1') введением новой неизвестной функции $u = \frac{y}{x}$. Такой подход к решению задачи является естественным, так как переменные x и y входят в однородное уравнение только в сочетании $\frac{y}{x}$. Иначе говоря, решение y уравнения (1') мы будем искать в виде произведения xu независимой переменной x и некоторой, пока неизвестной, функции u .

Подставив в уравнение (1')

$$y = xu, \quad \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx},$$

получим уравнение

$$u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u) \quad (2)$$

относительно новой неизвестной функции u , в котором переменные разделяются. Разделив переменные, мы получим:

$$\frac{du}{u - \varphi(u)} + \frac{dx}{x} = 0.$$

(Здесь мы можем считать $u - \varphi(u) \neq 0$, так как $\varphi(u) \equiv u$ только для уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, в котором переменные разделяются.)

Следовательно, общий интеграл уравнения (2) выразится соотношением

$$\int \frac{du}{u - \varphi(u)} + \ln x = \ln c,$$

которое можно записать в виде

$$x = c \cdot F(u),$$

обозначив $e^{\int \frac{du}{\varphi(u) - u}}$ через $F(u)$. Наконец, заменив в этом

соотношении u через $\frac{y}{x}$, мы получим общий интеграл данного однородного уравнения:

$$x = c \cdot F\left(\frac{y}{x}\right). \quad (3)$$

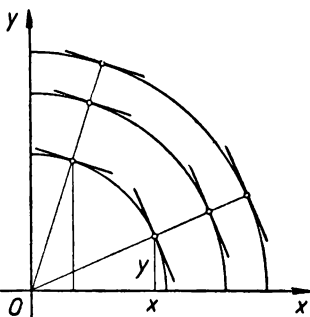
Из уравнения (3) видно, что интегральные кривые однородного дифференциального уравнения образуют семейство подобных кривых, с центром подобия в начале координат.

Действительно, чтобы получить уравнение (3) любой интегральной кривой, соответствующей произвольному значению параметра c , достаточно взять уравнение

$$x = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

интегральной кривой, соответствующей значению $c=1$, и заменить в нем x на $\frac{x}{c}$, а y на $\frac{y}{c}$. Это означает, что из одной интегральной кривой можно получить любую другую интегральную кривую, увеличив или уменьшив координаты x и y точек первой кривой в некоторое число раз, одинаковое для x и y .

Верно и обратное утверждение: если дано семейство подобных кривых с центром подобия в начале координат, зависящее от одного параметра, то дифференциальное уравнение, выражающее это семейство, есть однородное уравнение первого порядка.



Черт. 61

Действительно, все касательные, проведенные к кривым такого семейства в точках пересечения этих кривых с прямой, исходящей из начала координат, параллельны между собой (черт. 61). Это означает, что в указанных точках производная $\frac{dy}{dx}$ имеет одно и то же значение. Но для этих точек постоянное значение имеет и отношение их координат $\frac{y}{x}$. Производная $\frac{dy}{dx}$ может измениться только при переходе из точки на одном луче в точку

на другом луче, исходящем из начала, т. е. при изменении отношения $\frac{y}{x}$. Таким образом, $\frac{dy}{dx}$ есть некоторая функция от $\frac{y}{x}$. Обозначая эту функцию через $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, мы можем написать соотношение

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

которое представляет однородное дифференциальное уравнение данного семейства кривых.

Пример. Решить уравнение

$$(x^2 - y^2) dx + 2xy dy = 0.$$

Решение. Дано однородное уравнение, так как $P(x, y) = x^2 - y^2$ и $Q(x, y) = 2xy$ — однородные функции одной и той же степени (второй степени).

Положим,

$$y = xu.$$

Тогда

$$dy = xdu + udx.$$

Подставив в данное уравнение, получим:

$$(x^2 - x^2u^2) dx + 2x^2u(xdu + udx) = 0,$$

или после упрощений:

$$x^2(1 + u^2) dx + 2x^3udu = 0.$$

В полученном уравнении переменные разделяются:

$$\frac{dx}{x} + \frac{2udu}{1 + u^2} = 0.$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2udu}{1 + u^2} &= c, \\ \ln x + \ln(1 + u^2) &= \ln c, \\ x(1 + u^2) &= c. \end{aligned}$$

Но $u = \frac{y}{x}$. Поэтому общий интеграл данного уравнения есть

$$x\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = c,$$

или

$$x^2 + y^2 = cx.$$

§ 4. Уравнения, приводящиеся к однородным

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right). \quad (1)$$

Если $c = c_1 = 0$, то данное уравнение — однородное, так как

$$f\left(\frac{ax + by}{a_1x + b_1y}\right) = f\left(\frac{a + b \frac{y}{x}}{a_1 + b_1 \frac{y}{x}}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Пусть не равно нулю по крайней мере одно из чисел c или c_1 .

Положим,

$$x = u + h, \quad y = v + k,$$

где u и v — новые переменные, а h и k — некоторые, пока неопределенные, постоянные. Тогда

$$dx = du, \quad dy = dv.$$

Подставив в уравнение (1), получим:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au + bv + ah + bk + c}{a_1u + b_1v + a_1h + b_1k + c_1}\right).$$

Отсюда видно, что числа h и k надо выбрать такими, чтобы обратились в нуль выражения $ah + bk + c$ и $a_1h + b_1k + c_1$. Тогда получим однородное уравнение:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au + bv}{a_1u + b_1v}\right). \quad (2)$$

Такие h и k мы найдем, решив систему уравнений

$$\begin{aligned} ah + bk + c &= 0, \\ a_1h + b_1k + c_1 &= 0, \end{aligned}$$

если только определитель этой системы не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

В этом случае, чтобы найти общий интеграл данного уравнения (1), надо найти общий интеграл уравнения (2) и в нем переменные u и v заменить соответственно через $x - h$ и $y - k$.

Если

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0,$$

то коэффициенты при x и y в выражениях $ax + by + c$ и $a_1x + b_1y + c_1$ пропорциональны и правая часть уравнения (1) имеет вид

$$f\left[\frac{(ax + by) + c}{k(ax + by) + c_1}\right]$$

или

$$f\left[\frac{k_1(a_1x + b_1y) + c}{(a_1x + b_1y) + c_1}\right].$$

Следовательно, данное уравнение (1) в этом случае будет иметь вид

$$\frac{dy}{dx} = \psi(ax + \beta y). \quad (1')$$

Уравнение (1') приводится к уравнению с разделяющимися переменными введением новой переменной. Действительно, положим

$$z = ax + \beta y.$$

Тогда

$$\frac{dz}{dx} = \alpha + \beta \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\beta} \frac{dz}{dx} - \frac{\alpha}{\beta}.$$

Подставляя в уравнение (1'), получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \frac{dz}{dx} - \frac{\alpha}{\beta} &= \psi(z), \\ \frac{dz}{dx} &= \beta \psi(z) + \alpha, \\ \frac{dz}{\beta \psi(z) + \alpha} &= dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Общий интеграл уравнения (3) выражается соотношением

$$x + c = \int \frac{dz}{\beta \psi(z) + \alpha}.$$

Заменив в нем z через $ax + \beta y$, мы получим общий интеграл данного уравнения (1').

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y + 7}{2x + y - 1}.$$

Решение. Так как

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

положим,

$$x = u + h, \quad y = v + k.$$

Решая систему уравнений

$$h - 2k + 7 = 0,$$

$$2h + k - 1 = 0,$$

найдем:

$$h = -1, \quad k = 3.$$

Поэтому мы возьмем

$$x = u - 1, \quad y = v + 3,$$

откуда

$$dx = du, \quad dy = dv.$$

Подставляя в данное уравнение, получим:

$$\frac{dv}{du} = \frac{u - 2v}{2u + v}.$$

Это — однородное уравнение. Полагая в нем

$$v = uz,$$

получим:

$$z + u \frac{dz}{du} = \frac{u - 2uz}{2u + uz},$$

$$u \frac{dz}{du} = \frac{1 - 4z - z^2}{2 + z},$$

а после разделения переменных —

$$\frac{du}{u} + \frac{(z + 2) dz}{z^2 + 4z - 1} = 0.$$

Отсюда имеем:

$$\int \frac{du}{u} + \int \frac{(z + 2) dz}{z^2 + 4z - 1} = c,$$

$$\ln u + \frac{1}{2} \ln (z^2 + 4z - 1) = c,$$

$$2 \ln u + \ln (z^2 + 4z - 1) = \ln c,$$

$$u^2 (z^2 + 4z - 1) = c.$$

Но $z = \frac{v}{u}$. Поэтому

$$u^2 \left(\frac{v^2}{u^2} + 4 \frac{v}{u} - 1 \right) = c, \\ v^2 + 4uv - u^2 = c.$$

Наконец, заменяя в последнем равенстве u и v соответственно через $x+1$ и $y-3$, получим общий интеграл исходного уравнения:

$$(y-3)^2 + 4(x+1)(y-3) - (x+1)^2 = c,$$

или, после упрощений, окончательно:

$$y^2 + 4xy - x^2 - 2y - 14x = c.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$(x+y-2)dx + (2x+2y+1)dy = 0.$$

Решение. Здесь коэффициенты при x и y в выражениях $x+y-2$ и $2x+2y+1$ пропорциональны. Поэтому введем новую переменную, пользуясь подстановкой

$$z = x + y.$$

Отсюда имеем:

$$dy = dz - dx.$$

Подставляя в данное уравнение, получим уравнение:

$$(z-2)dx + (2z+1)(dz-dx) = 0,$$

или

$$(2z+1)dz - (z+3)dx = 0,$$

в котором переменные разделяются:

$$\frac{2z+1}{z+3} dz - dx = 0.$$

Отсюда следует:

$$x + c = \int \frac{2z+1}{z+3} dz, \\ x + c = 2 \int dz - 5 \int \frac{dz}{z+3}, \\ x + c = 2z - 5 \ln(z+3).$$

Заменяя в этом равенстве z через $x + y$, получим общий интеграл исходного уравнения:

$$x + c = 2(x + y) - 5 \ln(x + y + 3),$$

или

$$x + 2y - 5 \ln(x + y + 3) = c.$$

§ 5. Линейные уравнения

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (1)$$

называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка, так как оно линейно относительно искомой функции y и ее производной $\frac{dy}{dx}$.

Разделение переменных в линейном уравнении возможно лишь в том частном случае, когда $Q(x) \equiv k \cdot P(x)$, где k — некоторая постоянная. В общем случае, следуя методу интегрирования однородных уравнений, решение линейного уравнения мы будем искать в виде произведения двух множителей: $y = uv$. Однако если первый множитель в решении однородного уравнения мы выбирали заранее, равным x , то первый множитель u в решении линейного уравнения мы определим позже и так, чтобы возможно больше упростить задачу.

Итак, положим

$$y = uv.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

Подставив в уравнение (1), получим:

$$u \frac{dv}{dx} + v \left[\frac{du}{dx} + P(x)u \right] = Q(x). \quad (2)$$

Отсюда видно, что если в качестве u взять такую функцию, для которой выражение, заключенное в квадратные скобки, равно нулю, то в уравнении (2) будет возможно разделение переменных. Но это означает, что за функцию u надо взять решение уравнения

$$\frac{du}{dx} + P(x)u = 0. \quad (3)$$

В уравнении (3) переменные разделяются:

$$\frac{du}{u} + P(x) dx = 0.$$

Отсюда находим:

$$\ln u = - \int P(x) dx + c,$$
$$u = e^{- \int P(x) dx + c}$$

Учитывая, что для нашей цели пригодно любое решение уравнения (3), мы можем взять $c = 0$. Таким образом, в выборе множителя u мы останавливаемся на функции

$$u = e^{- \int P(x) dx}.$$

Подставив в уравнение (2) вместо u выбранную здесь функцию, мы получим для определения v уравнение:

$$e^{- \int P(x) dx} \frac{dv}{dx} = Q(x). \quad (4)$$

Разделив переменные в уравнении (4), получим:

$$dv = Q(x) e^{\int P(x) dx} dx.$$

Откуда находим:

$$v = \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + c.$$

Следовательно, общее решение данного линейного уравнения (1) выражается формулой:

$$y = e^{- \int P(x) dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + c \right].$$

Пример. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} + y \sin x = 2x e^{\cos x}.$$

Решение. Замечаем, что данное уравнение линейное. Поэтому положим

$$y = uv.$$

Откуда находим:

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

Подставив в данное уравнение, получим:

$$u \frac{dv}{dx} + v \left(\frac{du}{dx} + u \sin x \right) = 2x e^{\cos x}.$$

Функцию u определим так, чтобы сумма в скобках была равна нулю. Для этого решим уравнение

$$\frac{du}{dx} + u \sin x = 0,$$

в котором переменные разделяются:

$$\frac{du}{u} + \sin x \, dx = 0.$$

Проинтегрировав это уравнение и взяв частное решение, соответствующее значению параметра $c = 0$, получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{u} + \int \sin x \, dx &= 0, \\ \ln u &= \cos x, \\ u &= e^{\cos x}. \end{aligned}$$

Выбрав u таким образом, для определения v мы получим уравнение

$$e^{\cos x} \frac{dv}{dx} = 2x e^{\cos x},$$

в котором переменные опять разделяются:

$$dv = 2x \, dx.$$

Отсюда находим:

$$v = x^2 + c.$$

Следовательно, общее решение $y = uv$ данного уравнения выражается формулой:

$$y = e^{\cos x} (x^2 + c).$$

§ 6. Уравнение Бернулли

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad (1)$$

где n — любое действительное число, отличное от 0 и 1, называется уравнением Бернулли.

При $n=0$ уравнение (1) линейное, а при $n=1$ переменные разделяются.

Уравнение Бернулли можно привести к линейному уравнению. Действительно, разделив обе части уравнения на y^n и положив

$$z = y^{1-n},$$

получим:

$$\frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + P(x) z = Q(x).$$

Однако в этом нет надобности, так как метод интегрирования линейных уравнений можно применить непосредственно к уравнению Бернулли.

Действительно, положим в уравнении (1)

$$y = uv.$$

Тогда получим:

$$u \frac{dv}{dx} + v \left[\frac{du}{dx} + P(x) u \right] = Q(x) u^n v^n.$$

Как и в случае линейных уравнений, для определения функции u решаем уравнение

$$\frac{du}{dx} + P(x) u = 0$$

и берем

$$u = e^{-\int P(x) dx}.$$

Тогда для определения v получим уравнение

$$\frac{dv}{dx} = Q(x) u^{n-1} v^n,$$

где u — известно и переменные x и v разделяются.

Отсюда ясно, что задача интегрирования уравнения Бернулли подстановкой $y = uv$ может быть доведена до конца.

Пример. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \sqrt{y}.$$

Решение. Очевидно, здесь мы имеем уравнение Бернулли.

Положим,

$$y = uv.$$

Подставив в данное уравнение, получим:

$$u \frac{dv}{dx} + v \left(\frac{du}{dx} + 2xu \right) = 4x \sqrt{uv}.$$

Функцию u определим из условия, чтобы сумма в скобках была равна нулю:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} + 2xu &= 0, \\ \frac{du}{u} + 2x dx &= 0, \\ \ln u + x^2 &= 0, \\ u &= e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Теперь для определения v мы имеем уравнение:

$$\begin{aligned} u \frac{dv}{dx} &= 4x \sqrt{u} \sqrt{v}, \\ \frac{dv}{dx} &= \frac{4x}{\sqrt{u}} \sqrt{v}, \\ \frac{dv}{dx} &= 4xe^{\frac{x^2}{2}} \sqrt{v}. \end{aligned}$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{\sqrt{v}} &= 4 \int xe^{\frac{x^2}{2}} dx + c, \\ 2\sqrt{v} &= 4e^{\frac{x^2}{2}} + c, \\ \sqrt{v} &= 2e^{\frac{x^2}{2}} + c. \end{aligned}$$

Наконец, умножив значение $\sqrt{v}$ на

$$\sqrt{u} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

и заменив $\sqrt{uv}$ через $\sqrt{y}$, получим искомый общий интеграл:

$$\sqrt{y} = ce^{-\frac{x^2}{2}} + 2.$$

ГЛАВА II

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

§ 1. Поле направлений

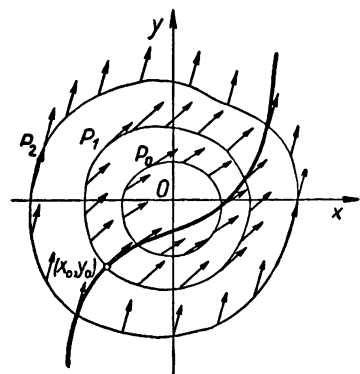
Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (1)$$

Решение $y = y(x)$ уравнения (1) геометрически представляет некоторую линию на плоскости xOy — интегральную линию уравнения (1), а производная решения $\frac{dy(x)}{dx}$ есть угловой коэффициент касательной к этой линии в точке $(x, y(x))$. Поэтому задание уравнения (1) означает, что в каждой точке $M(x, y)$ области, в которой функция $f(x, y)$ определена, задано направление касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку.

Таким образом, имея уравнение (1), мы имеем некоторое поле направлений, и задача интегрирования уравнения (1) заключается в отыскании такого семейства кривых, чтобы направление касательной к любой кривой семейства в любой точке совпадало с направлением данного поля в этой точке.

Такое истолкование дифференциального уравнения (1) и его интегрирования дает нам следующий графический способ решения уравнения, который называется способом изоклин.



Черт. 62

Сначала на плоскости xOy проведем линию, вдоль которой функция $f(x, y)$ имеет постоянное значение, равное некоторому p . Эту линию интегральные кривые пересекают под одним и тем же углом к положительному направлению оси Ox , тангенс которого равен $p = f(x, y) = \frac{dy}{dx}$. Придавая p ряд значений, мы получим

ряд изоклин — линий постоянного наклона интегральных кривых. Затем на изоклинах расставим стрелки под таким углом к положительному направлению оси Ox , чтобы тангенс этого угла равнялся соответствующему значению p .

Теперь, чтобы получить приближенный график решения уравнения (1) с начальным условием: $x = x_0, y = y_0$, надо, исходя из точки (x_0, y_0) , провести кривую таким образом, чтобы она пересекала изоклины так, как указывают стрелки на этих изоклинах (черт. 62).

§ 2. Метод Эйлера

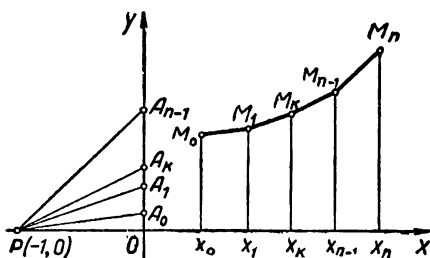
Пусть для значений x из отрезка $[x_0, x_0 + a]$ требуется найти решение $y(x)$ уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

удовлетворяющее начальному условию:

$$x = x_0, y = y_0.$$

Здесь мы рассмотрим приближенное решение поставленной задачи методом Эйлера, который заклю-



Черт. 63

чается в построении ломаной, представляющей приближение к искомой интегральной кривой данного уравнения, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Разобьем отрезок $[x_0, x_0 + a]$ на n частей точками

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n = x_0 + a$$

и через точки деления проведем прямые, параллельные оси Oy (черт. 63).

На оси Ox влево от начала на расстоянии, равном 1, отметим точку $P(-1, 0)$ — полюс.

Вычислим значение функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ и на оси Oy , как на числовой оси, отметим точку A_0 , соответствующую числу $f(x_0, y_0)$. Точку A_0 соединим отрезком прямой с полюсом P . Из точки $M_0(x_0, y_0)$ проведем прямую параллельно отрезку PA_0 до встречи с прямой $x=x_1$ в точке M_1 .

Так как

$$\operatorname{tg} \widehat{OPA_0} = \frac{OA_0}{PO} = OA_0 = f(x_0, y_0) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0, y_0},$$

то отрезок M_0M_1 есть отрезок касательной к искомой интегральной кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$. Этот отрезок мы и примем за приближение к искомой интегральной кривой на участке $[x_0, x_1]$. Так будет построено первое звено ломаной Эйлера.

Уравнение прямой M_0M_1 есть

$$y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0),$$

поэтому ордината точки M_1 равна

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0).$$

Затем вычислим значение функции $f(x, y)$ в точке $M_1(x_1, y_1)$ и на оси Oy отметим точку A_1 , соответствующую числу $f(x_1, y_1)$. Соединим точку A_1 с полюсом P . Из точки $M_1(x_1, y_1)$ проведем прямую параллельно отрезку PA_1 до встречи с прямой $x=x_2$ в точке M_2 . Отрезок M_1M_2 примем за приближение к искомой интегральной кривой на участке $[x_1, x_2]$ и таким образом будет построено второе звено ломаной Эйлера.

Уравнение прямой M_1M_2 , очевидно, есть

$$y - y_1 = f(x_1, y_1)(x - x_1),$$

поэтому ордината точки M_2 равна

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1).$$

Таким же путем построим отрезки $M_2M_3, \dots, M_{n-1}M_n$, которые мы примем за приближения к искомой интегральной кривой на участках $[x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, а ломаную $M_0M_1M_2 \dots M_k \dots M_n$ — за приближение к искомой интегральной кривой на отрезке $[x_0, x_0 + a]$.

Ордината точки $M_k(x_k, y_k)$ выразится формулой:

$$y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})(x_k - x_{k-1}),$$

в частности, для конечной точки $M_n(x_n, y_n)$ будем иметь:

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

В точке x из отрезка $[x_0, x_0 + a]$ отклонение построенной ломаной Эйлера от истинной интегральной кривой данного уравнения, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$, становится, вообще говоря, тем большим, чем будет дальше рассматриваемая точка x от x_0 , так как только точка M_0 ломаной находится на искомой интегральной кривой, а точки $M_1, M_2, \dots, M_n$ в общем случае не принадлежат этой интегральной кривой.

§ 3. Доказательство теоремы существования и единственности методом последовательных приближений

Для дифференциальных уравнений, которые интегрируются в квадратурах, вопрос о существовании решения не возникает. Но если данное уравнение такое, что мы не имеем способа его интегрирования, то тогда возникают вопросы: 1) существования решения; 2) единственности решения, удовлетворяющего данному начальному условию; 3) построения приближений искомого решения.

Здесь мы, пользуясь методом последовательных приближений (методом Пикара), докажем теорему (Коши) существования и единственности решения, удовлетворяющего начальным данным, для дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной, правая часть которого удовлетворяет некоторым условиям. Причем способ доказательства является одновременно и способом приближенного решения уравнения.

Теорема 1. Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

с начальным условием:

$$\text{при } x = x_0 \text{ должно быть } y = y_0. \quad (2)$$

Пусть относительно правой части уравнения (1) выполнены следующие условия:

1. В прямоугольнике R , который определен неравенствами $x_0 - a \leq x \leq x_0 + a$, $y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$, функция $f(x, y)$ непрерывна.

Из этого условия вытекает, что в замкнутой области R функция $f(x, y)$ ограничена, поэтому существует такое число $M > 0$, что $|f(x, y)| \leq M$ для всех точек области R .

2. В области R функция $f(x, y)$ относительно аргумента y удовлетворяет условию Липшица, т. е. существует такое число $A > 0$, что

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq A |y_1 - y_2|$$

для любых двух точек (x, y_1) и (x, y_2) из области R , отличающихся только ординатами.

Обозначим через h меньшее из двух чисел a и $\frac{b}{M}$.

При данных условиях существует единственная функция $y = Y(x)$, непрерывная на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$, которая удовлетворяет уравнению (1) и начальному условию (2).

До того как перейти к доказательству теоремы, заметим, что в области R условие Липшица для функции $f(x, y)$ будет заведомо выполнено, если в этой области существует производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ и она ограничена. В самом деле, в этом случае по теореме Лагранжа имеем:

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=\bar{y}}(y_1 - y_2),$$

где $\bar{y}$ — значение y , содержащееся между y_1 и y_2 . Отсюда следует, что, выбрав число $A > 0$ таким, чтобы в области R было $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq A$ (такое число найдется в силу ограниченности $\frac{\partial f}{\partial y}$ в области R), мы будем иметь:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq A |y_1 - y_2|.$$

Доказательство теоремы. Прежде всего заметим, что уравнение (1) и начальное условие (2) вместе эквивалентны следующему интегральному уравнению относительно функции $y(x)$:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[x, y(x)] dx. \quad (3)$$

В самом деле, пусть $Y(x)$ есть решение интегрального уравнения (3). Тогда имеет место тождество

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[x, Y(x)] dx. \quad (3')$$

Продифференцировав обе части этого тождества по x , мы получим тождество:

$$\frac{dY(x)}{dx} = f[x, Y(x)],$$

откуда видно, что $Y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1). Кроме того, из тождества (3') следует, что $Y(x_0) = y_0$, а это означает, что $Y(x)$ удовлетворяет начальному условию (2).

Обратно, пусть $Y(x)$ есть решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее условию (2). Тогда, подставив $Y(x)$ в уравнение (1), мы получим тождество:

$$\frac{dY(x)}{dx} = f[x, Y(x)].$$

Интегрируя обе части этого тождества в пределах от x_0 до x , мы получим тождество:

$$Y(x) - Y(x_0) = \int_{x_0}^x f[x, Y(x)] dx.$$

Но $Y(x_0) = y_0$, так как $Y(x)$ удовлетворяет условию (2). Поэтому имеем тождество:

$$Y(x) - y_0 = \int_{x_0}^x f[x, Y(x)] dx,$$

а это означает, что $Y(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (3).

Таким образом, доказательство теоремы мы привели к доказательству существования и единственности решения интегрального уравнения (3), которое мы проведем методом последовательных приближений.

Доказательство существования. В качестве первого приближения решения уравнения (3) мы возьмем данное нам начальное значение y_0 искомой функ-

ции, а следующие приближения определим на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$ формулами:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx, \\ y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx, \\ &\dots \dots \dots \\ y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Убедимся, что эти формулы действительно позволяют нам образовать последовательность непрерывных на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$ функций $\{y_n(x)\}$.

Первая из формул (4), определяющая $y_1(x)$, не вызывает никаких сомнений, так как функция $f(x, y_0)$, очевидно, непрерывна на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$, и поэтому интеграл $\int_{x_0}^x f(x, y_0) dx$ существует и представляет непрерывную функцию от x .

Из формулы для $y_1(x)$ имеем:

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx \right| \leq M |x - x_0| \leq Mh \leq b.$$

Поэтому если $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, то $y_0 - b \leq y_1 \leq y_0 + b$ и точка (x, y_1) содержится в области R , где функция $f(x, y)$ непрерывна. Следовательно, на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$ непрерывна и сложная функция $f(x, y_1(x))$.

Поэтому интеграл $\int_{x_0}^x f(x, y_1) dx$ существует и является непрерывной функцией от x , а вместе с ним существует и непрерывна функция $y_2(x)$, образованная второй из формул (4).

Так же можно убедиться в том, что $|y_{n-1} - y_0| \leq b$, и поэтому нет никаких препятствий для составления на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$ непрерывной функции $y_n(x)$ по соответствующей формуле (4) для любого номера n .

Докажем, что последовательность $\{y_n(x)\}$ на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$ сходится и предельная функция $Y(x)$ непрерывна на этом отрезке. С этой целью образуем ряд

$$y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [y_n(x) - y_{n-1}(x)], \quad (5)$$

n -я частичная сумма которого есть $y_n(x)$, и докажем, что он на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$ сходится равномерно.

Из соотношений (4) имеем:

$$|y_2 - y_1| = \left| \int_{x_0}^x [f(x, y_1) - f(x, y_0)] dx \right|.$$

Но по условию Липшица

$$|f(x, y_1) - f(x, y_0)| \leq A |y_1 - y_0|,$$

причем, как уже было замечено выше, $|y_1 - y_0| \leq M |x - x_0|$, поэтому

$$|f(x, y_1) - f(x, y_0)| \leq AM |x - x_0|.$$

Следовательно,

$$|y_2 - y_1| \leq AM \left| \int_{x_0}^x |x - x_0| dx \right| = AM \frac{|x - x_0|^2}{1 \cdot 2},$$

так как при $x - x_0 > 0$ имеем:

$$\int_{x_0}^x |x - x_0| dx = \int_{x_0}^x (x - x_0) dx = \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2},$$

если же $x - x_0 < 0$, то

$$\int_{x_0}^x |x - x_0| dx = - \int_{x_0}^x (x - x_0) dx = - \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2}.$$

Аналогичным образом получим:

$$\begin{aligned} |y_3 - y_2| &= \left| \int_{x_0}^x [f(x, y_2) - f(x, y_1)] dx \right| \leq \\ &\leq A \left| \int_{x_0}^x |y_2 - y_1| dx \right| \leq A^2 M \frac{|x - x_0|^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \end{aligned}$$

и, продолжая дальше, для любого n :

$$|y_n - y_{n-1}| \leq A^{n-1} M \frac{|x - x_0|^n}{n!}.$$

Заменив в правой части последнего неравенства $|x - x_0|$ через h , мы усилим это неравенство и получим:

$$|y_n - y_{n-1}| \leq A^{n-1} M \frac{h^n}{n!} \quad (n \geq 1). \quad (6)$$

Так как числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} A^{n-1} M \frac{h^n}{n!}$$

сходящийся, в чем легко убедиться по признаку Даламбера, то из неравенств (6) вытекает согласно критерию Вейерштрасса, что функциональный ряд (5) на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$ сходится равномерно. Сумма ряда (5)

$$Y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$$

на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$ непрерывна как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций.

Докажем затем, что функция $Y(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (3).

Так как при любом n для функции $y_n(x)$ на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$ имеем $|y_n - y_0| \leq b$, то и для предельной функции $Y(x)$ на этом отрезке верно неравенство

$|Y - y_0| \leq b$. Поэтому интеграл $\int_{x_0}^x f[x, Y(x)] dx$ существует для всех x из отрезка $[x_0 - h, x_0 + h]$. Кроме того, можно убедиться, что

$$\int_{x_0}^x f[x, Y(x)] dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f[x, y_n(x)] dx. \quad (7)$$

В самом деле, возьмем произвольное $\epsilon > 0$. В силу условия Липшица имеем:

$$|f[x, Y(x)] - f[x, y_n(x)]| \leq A |Y(x) - y_n(x)|.$$

Но ряд (5) на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$ сходится к $Y(x)$ равномерно, вследствие чего найдется такой номер N , что для любого $n \geq N$ будет верно неравенство

$|Y(x) - y_n(x)| < \varepsilon$ при всех значениях x из отрезка $[x_0 - h, x_0 + h]$. Поэтому для каждого $n \geq N$ для всех $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$

$$|f[x, Y(x)] - f[x, y_n(x)]| < A\varepsilon.$$

Отсюда следует, что на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_0}^x f[x, Y(x)] dx - \int_{x_0}^x f[x, y_n(x)] dx \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{x_0}^x |f[x, Y(x)] - f[x, y_n(x)]| dx \right| < A\varepsilon |x - x_0| \leq A\varepsilon h \end{aligned}$$

для любого $n \geq N$, что и доказывает равенство (7), так как числа A и h фиксированные, а ε — произвольно мало.

Из определения $Y(x)$ как предела последовательности $\{y_n(x)\}$ и равенства (7) вытекает, что, переходя в формуле

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[x, y_{n-1}(x)] dx$$

к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим тождество:

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[x, Y(x)] dx,$$

которое и означает, что $Y(x)$ есть решение интегрального уравнения (3).

Итак, существование решения уравнения (3), а вместе с тем и существование решения данного дифференциального уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию (2), доказано.

Доказательство единственности. Докажем, что, кроме $Y(x)$, не существует других решений уравнения (1), удовлетворяющих начальному условию (2).

Допустим, что функция $Y_1(x)$, определенная и непрерывная на отрезке $[x_0 - h_1, x_0 + h_1]$, где $h_1 \leq h$, также является решением уравнения (1), принимающим значение y_0 при $x = x_0$, причем значения $Y_1(x)$ в точках $x \in [x_0 - h_1, x_0 + h_1]$ не выходят из отрезка $[y_0 - b, y_0 + b]$, соответствующего прямоугольнику R , т. е.

$$|Y_1(x) - y_0| \leq b. \quad (8)$$

Так как дифференциальное уравнение (1) с начальным условием (2) и интегральное уравнение (3) эквивалентны, то наше допущение означает также, что $Y_1(x)$ есть решение уравнения (3), и поэтому имеет место тождество:

$$Y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[x, Y_1(x)] dx.$$

Из этого тождества и формулы, определяющей $y_n(x)$, следует:

$$Y_1(x) - y_n(x) = \int_{x_0}^x \{f[x, Y_1(x)] - f[x, y_{n-1}(x)]\} dx.$$

Отсюда при $n=1$, воспользовавшись условием Липшица и неравенством (8), получим:

$$\begin{aligned} |Y_1(x) - y_1(x)| &= \left| \int_{x_0}^x \{f[x, Y_1(x)] - f[x, y_0]\} dx \right| \leq \\ &\leq A \left| \int_{x_0}^x |Y_1(x) - y_0| dx \right| \leq Ab|x - x_0|. \end{aligned}$$

Затем при $n=2$ найдем:

$$\begin{aligned} |Y_1(x) - y_2(x)| &= \left| \int_{x_0}^x \{f[x, Y_1(x)] - f[x, y_1(x)]\} dx \right| \leq \\ &\leq A \left| \int_{x_0}^x |Y_1(x) - y_1(x)| dx \right| \leq A^2 b \frac{|x - x_0|^2}{2!}. \end{aligned}$$

Продолжая дальше, получим для любого n :

$$|Y_1(x) - y_n(x)| \leq A^n b \frac{|x - x_0|^n}{n!}.$$

Так как здесь $|x - x_0| \leq h_1$, то мы имеем:

$$|Y_1(x) - y_n(x)| \leq A^n b \frac{h_1^n}{n!} \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (9)$$

Замечая, что числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} A^n b \frac{h_1^n}{n!}$$

сходящийся, в чем можно убедиться по признаку Даламбера, мы видим, что правая часть неравенства (9), представляющая общий член сходящегося ряда, стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$Y_1(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x).$$

Но $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = Y(x)$. Поэтому

$$Y_1(x) \equiv Y(x).$$

Это и доказывает, что существует единственное решение $Y(x)$ дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2).

Функции $y_n(x)$, определенные формулами (4), являются приближениями для решения $Y(x)$ уравнения (1) с начальными данными (2).

Теорема доказана полностью.

Метод последовательных приближений применяется и в случае системы дифференциальных уравнений. Сформулируем теорему существования и единственности для системы уравнений ради простоты применительно к случаю системы двух уравнений относительно двух искомых функций.

Теорема 2. Пусть дана система уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= \varphi(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (1^*)$$

с начальными условиями:

$$\text{при } x = x_0 \text{ имеем } y = y_0, z = z_0. \quad (2^*)$$

Пусть относительно правых частей уравнений (1*) выполнены следующие условия:

1. В области D , определенной неравенствами

$$x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \quad y_0 - b \leq y \leq y_0 + b, \quad z_0 - c \leq z \leq z_0 + c, \quad \text{функции } f(x, y, z) \text{ и } \varphi(x, y, z) \text{ непрерывны.}$$

Из этого вытекает, что $f(x, y, z)$ и $\varphi(x, y, z)$ в замкнутой области D ограничены, и поэтому существует такое $M > 0$, что

$$|f(x, y, z)| \leq M \text{ и } |\varphi(x, y, z)| \leq M$$

во всех точках области D .

2. В области D функции $f(x, y, z)$ и $\varphi(x, y, z)$ удовлетворяют относительно аргументов y и z условию Липшица: существует такое $A > 0$, что

$$\begin{aligned} |f(x, y_1, z_1) - f(x, y_2, z_2)| &\leq A \{|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\}, \\ |\varphi(x, y_1, z_1) - \varphi(x, y_2, z_2)| &\leq A \{|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\} \end{aligned}$$

для любых двух точек (x, y_1, z_1) и (x, y_2, z_2) области D , у которых абсцисса x одна и та же.

Обозначим через h меньшее из чисел a , $\frac{b}{M}$ и $\frac{c}{M}$.

При данных условиях на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$ существует единственная система непрерывных функций $Y(x)$ и $Z(x)$, удовлетворяющая системе дифференциальных уравнений (1^*) и начальным условиям (2^*) .

Опять можно заметить, что условие Липшица будет заведомо выполнено, если в области D функции $f(x, y, z)$ и $\varphi(x, y, z)$ имеют ограниченные производные $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$.

Теорема 2 доказывается аналогично теореме 1, надо только построить две последовательности $\{y_n(x)\}$ и $\{z_n(x)\}$, пользуясь формулами такой же структуры, как и формулы (4).

Г Л А В А III

УРАВНЕНИЯ, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

§ 1. Уравнения, разрешенные относительно одной из переменных

Все рассмотренные выше дифференциальные уравнения можно назвать уравнениями, разрешенными относительно производной, так как каждое из этих уравнений можно было представить в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Здесь мы рассмотрим несколько видов дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной.

1. Уравнение вида

$$y = f\left(\frac{dy}{dx}\right), \quad (A)$$

не содержащее x и разрешенное относительно y .

Положим в данном уравнении

$$\frac{dy}{dx} = p.$$

Тогда y выразится как функция от p :

$$y = f(p). \quad (1)$$

Если теперь удастся выразить как функцию от p также и переменную x , то связь между независимой переменной x и искомой функцией y будет установлена через третью переменную p , т. е. мы получим решение данного дифференциального уравнения (A) в параметрической форме, где параметром будет p .

Но выразить x через p нетрудно. Действительно, из равенства $\frac{dy}{dx} = p$ имеем:

$$dx = \frac{dy}{p},$$

а из соотношения (1), дифференцируя, находим:

$$dy = f'(p) dp.$$

Поэтому

$$dx = \frac{f'(p) dp}{p}.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, получим:

$$x = \int \frac{f'(p) dp}{p} + c. \quad (2)$$

Следовательно, приняв p за параметр, общее решение данного дифференциального уравнения (A) в параметрической форме выразится системой уравнений:

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{f'(p) dp}{p} + c, \\ y &= f(p), \end{aligned} \quad (3)$$

Если параметр p из уравнений (3) сможем исключить, то общий интеграл уравнения (А) получим в обычном виде:

$$F(x, y, c) = 0. \quad (3')$$

Пример. Решить уравнение

$$y \sqrt{y' - 1} = 2 - y'.$$

Решение. Разрешив данное уравнение относительно y , мы его представим в виде

$$y = \frac{2 - y'}{\sqrt{y' - 1}}.$$

Положим, $y' = p$. Тогда мы получим y как функцию от p :

$$y = \frac{2 - p}{\sqrt{p - 1}}.$$

Чтобы выразить и x как функцию p , мы возьмем

$$\begin{aligned} dx = \frac{dy}{p} &= \frac{1}{p} d \frac{2 - p}{\sqrt{p - 1}} = \frac{-\sqrt{p - 1} - (2 - p) \frac{1}{2\sqrt{p - 1}}}{p(p - 1)} dp = \\ &= - \frac{dp}{2(p - 1)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

и из уравнения

$$dx = - \frac{dp}{2(p - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

найдем:

$$x = - \int \frac{dp}{2(p - 1)^{\frac{3}{2}}} + c = \frac{1}{\sqrt{p - 1}} + c.$$

Следовательно, общее решение данного уравнения в параметрической форме выражается системой уравнений:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{p - 1}} + c, \\ y &= \frac{2 - p}{\sqrt{p - 1}}. \end{aligned}$$

Параметр p здесь легко можно исключить. В самом деле, из первого уравнения системы находим:

$$\sqrt{p - 1} = \frac{1}{x - c}, \quad p = \frac{1}{(x - c)^2} + 1.$$

Подставив во второе уравнение, получим:

$$y = \frac{1 - \frac{1}{(x-c)^2}}{\frac{1}{x-c}} = \frac{(x-c)^2 - 1}{x-c}.$$

Следовательно, общее решение данного дифференциального уравнения в явной форме выражается формулой:

$$y = x - c - \frac{1}{x-c}.$$

2. Уравнение вида

$$x = f\left(\frac{dy}{dx}\right), \quad (\text{B})$$

не содержащее y и разрешенное относительно x .

Это уравнение интегрируется таким же методом, как и уравнение (A), рассмотренное выше.

Положим в уравнении (B)

$$\frac{dy}{dx} = p.$$

Тогда получим.

$$x = f(p). \quad (4)$$

Так как

$$dy = p dx, \quad dx = f'(p) dp,$$

то

$$dy = p f'(p) dp.$$

Отсюда, интегрируя, находим:

$$y = \int p f'(p) dp + c. \quad (5)$$

Следовательно, общее решение данного уравнения (B) в параметрической форме выражается системой уравнений:

$$\begin{aligned} x &= f(p) \\ y &= \int p f'(p) dp + c, \end{aligned} \quad (6)$$

где параметром является p .

При исключении параметра p из уравнений (6) общий интеграл уравнения (B) принимает обычный вид:

$$F(x, y, c) = 0. \quad (6')$$

Пример. Решить уравнение

$$x\sqrt{1+y'^2}=y'.$$

Решение. Представив данное уравнение в виде

$$x = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

положим $y' = p$. Тогда получим:

$$x = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Так как

$$dy = p dx, \quad dx = \frac{\sqrt{1+p^2} - \frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}}}{1+p^2} dp = \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

и, следовательно,

$$dy = \frac{p dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

то

$$y = \int \frac{p dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + c = -\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} + c.$$

Поэтому общее решение данного дифференциального уравнения в параметрической форме выражается системой уравнений:

$$\begin{aligned} x &= \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \\ y &= c - \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}. \end{aligned}$$

Параметр p здесь можно исключить. Для этого достаточно выразить p через x из первого уравнения системы и подставить во второе:

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{p^2}{1+p^2}, \quad p^2 = \frac{x^2}{1-x^2}, \\ y &= c - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}} = c - \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, в явной форме решение данного дифференциального уравнения выражается формулой:

$$y = c - \sqrt{1 - x^2}.$$

3. Уравнение вида

$$y = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right). \quad (C)$$

Следуя методу интегрирования уравнений (A) и (B), положим в данном уравнении (C)

$$\frac{dy}{dx} = p.$$

Тогда получим:

$$y = f(x, p). \quad (7)$$

Продифференцируем обе части равенства (7) по x :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx}.$$

Заменив $\frac{dy}{dx}$ в левой части этого равенства через p , мы получим дифференциальное уравнение:

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx}, \quad (8)$$

связывающее x и p . Уравнение (8) можно считать разрешенным относительно производной. Пусть его общее решение будет

$$p = \varphi(x, c). \quad (9)$$

Исключив p из уравнений (7) и (9), для чего достаточно значение p из (9) подставить в (7), получим общее решение данного уравнения (C):

$$y = f[x, \varphi(x, c)]. \quad (10)$$

Пример. Решить уравнение

$$y = x^2 + 2xy' + \frac{1}{2}y'^2.$$

Решение. Положим $y' = p$. Тогда получим:

$$y = x^2 + 2xp + \frac{1}{2}p^2.$$

Продифференцировав обе части этого уравнения по x и заменив в левой части y' через p , получим:

$$p = 2x + 2p + (2x + p) \frac{dp}{dx},$$

или

$$dx + dp = 0.$$

Это — уравнение с разделенными переменными. Интегрируя, получим:

$$\begin{aligned} x + p &= c, \\ p &= c - x. \end{aligned}$$

Подставим найденное здесь значение p в выражение для y :

$$y = x^2 + 2x(c - x) + \frac{1}{2}(c - x)^2.$$

Упростив правую часть, получим окончательную формулу:

$$y = cx + \frac{c^2 - x^2}{2},$$

выражающую общее решение данного дифференциального уравнения.

4. Уравнение вида

$$x = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right). \quad (D)$$

Это уравнение интегрируется аналогично уравнению предыдущего вида.

Положим,

$$\frac{dy}{dx} = p.$$

Тогда получим:

$$x = f(y, p). \quad (11)$$

Отсюда, дифференцируя по y , находим:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dy}.$$

Здесь

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{p}.$$

Поэтому имеем дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dy}, \quad (12)$$

связывающее y и p . Уравнение (12) можно считать разрешенным относительно производной. Пусть его общее решение будет

$$p = \psi(y, c). \quad (13)$$

Подставляя значение p из (13) в соотношение (11), получим общий интеграл данного уравнения (D):

$$x = f[y, \psi(y, c)]. \quad (14)$$

Пример. Решить уравнение

$$x = \ln \frac{y}{y'}.$$

Решение. Положим $\frac{dy}{dx} = p$. Подставив в данное уравнение, получим:

$$x = \ln \frac{y}{p} \quad (\text{или } x = \ln y - \ln p).$$

Продифференцируем обе части этого уравнения по y и в левой части $\frac{dx}{dy}$ заменим через $\frac{1}{p}$:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{y} - \frac{1}{p} \frac{dp}{dy}.$$

Отсюда

$$\frac{dp}{dy} = \frac{p}{y} - 1.$$

Получили однородное дифференциальное уравнение относительно p . Применяя для его интегрирования известный метод, положим:

$$p = uy,$$

где u — неизвестная функция от y . Отсюда найдем:

$$y \frac{du}{dy} + u = u - 1,$$

$$du = -\frac{dy}{y},$$

$$u = -\ln y + c.$$

Заменив u через $\frac{p}{y}$, получим:

$$\frac{p}{y} = c - \ln y,$$

$$p = y(c - \ln y).$$

Подставив найденное здесь значение p в выражение для x , получим соотношение

$$x = \ln \frac{y}{y(c - \ln y)},$$

или

$$x = -\ln(c - \ln y),$$

которое и представляет общий интеграл данного дифференциального уравнения. Это соотношение можно представить также в виде

$$e^{-x} + \ln y = c.$$

5. Уравнение Лагранжа

$$y = xf\left(\frac{dy}{dx}\right) + \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right). \quad (E)$$

Как видим, уравнение Лагранжа линейно относительно переменных x и y .

Здесь мы будем полагать, что $f\left(\frac{dy}{dx}\right)$ не есть $\frac{dy}{dx}$. Случай, когда $f(y')$ сводится к y' , будет рассмотрен особо.

Следуя уже известному методу, положим в уравнении (E) $\frac{dy}{dx} = p$. Тогда получим:

$$y = xf(p) + \varphi(p). \quad (15)$$

Теперь остается выразить x через p . Для этого дифференцируем обе части равенства (15) по x и вместо производной $\frac{dy}{dx}$, которую получим в левой части, подставим p . В результате этого получим дифференциальное уравнение:

$$p = f(p) + xf'(p) \frac{dp}{dx} + \varphi'(p) \frac{dp}{dx}. \quad (16)$$

Рассматривая x как искомую функцию от p , представим уравнение (16) в виде

$$\frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p) - p} x + \frac{\varphi'(p)}{f(p) - p} = 0 \quad (16')$$

($f(p) - p \neq 0$, так как $f(y')$ не совпадает с y').

Полученное для x уравнение (16') является линейным дифференциальным уравнением первого порядка и, как

известно, интегрируется в квадратурах. Пусть его общее решение будет

$$x = \Phi(p, c). \quad (17)$$

Подставив значение x из (17) в уравнение (15), получим:

$$y = \Phi(p, c) f(p) + \varphi(p).$$

Следовательно, взяв p за параметр, общее решение данного уравнения Лагранжа мы можем выразить в параметрической форме системой уравнений

$$\begin{aligned} x &= \Phi(p, c), \\ y &= \Phi(p, c) f(p) + \varphi(p). \end{aligned} \quad (18)$$

Если параметр p из уравнений (18) исключить, то общий интеграл уравнения Лагранжа примет вид:

$$F(x, y, c) = 0, \quad (18')$$

Пример. Решить уравнение

$$y = xy'^2 + y'^3.$$

Решение. Дано уравнение Лагранжа. Положим $y' = p$. Тогда получим:

$$y = xp^2 + p^3.$$

Продифференцировав обе части этого уравнения по x и заменив y' снова через p , получим:

$$p = p^2 + x2p \frac{dp}{dx} + 2p \frac{dp}{dx},$$

а после преобразований:

$$(p^2 - p) \frac{dx}{dp} + 2px + 2p = 0.$$

Получили линейное дифференциальное уравнение относительно x . В то же время в этом уравнении переменные разделяются:

$$\frac{dx}{x+1} + \frac{2dp}{p-1} = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получим:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x+1} + 2 \int \frac{dp}{p-1} &= c, \\ \ln(x+1) + 2\ln(p-1) &= \ln c, \\ x+1 &= \frac{c}{(p-1)^2}, \\ x &= \frac{c}{(p-1)^2} - 1.\end{aligned}$$

Следовательно, приняв p за параметр, общее решение данного дифференциального уравнения выразим в параметрической форме системой уравнений:

$$\begin{aligned}x &= \frac{c}{(p-1)^2} - 1, \\ y &= \frac{cp^2}{(p-1)^2}.\end{aligned}$$

Здесь параметр p можно исключить. Действительно, из первого уравнения имеем:

$$(p-1)^2 = \frac{c}{x+1}, \quad p = \sqrt{\frac{c}{x+1}} + 1.$$

Подставив во второе уравнение, получим:

$$y = \frac{c \left(\sqrt{\frac{c}{x+1}} + 1 \right)^2}{\frac{c}{x+1}} = (\sqrt{c} + \sqrt{x+1})^2.$$

Следовательно, обозначив произвольную постоянную $\sqrt{c}$ просто через c , общее решение данного дифференциального уравнения мы можем выразить формулой:

$$y = (c + \sqrt{x+1})^2.$$

§ 2. Уравнение Клеро

Уравнение вида

$$y = x \frac{dy}{dx} + \varphi \left(\frac{dy}{dx} \right), \quad (1)$$

представляющее частный случай уравнения Лагранжа, называется уравнением Клеро.

Полагая в уравнении (1) $\frac{dy}{dx} = p$, получим:

$$y = xp + \varphi(p). \quad (2)$$

Дифференцируя по x обе части равенства (2), получим дифференциальное уравнение:

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + \varphi'(p) \frac{dp}{dx},$$

или

$$[x + \varphi'(p)] \frac{dp}{dx} = 0, \quad (3)$$

связывающее x и p .

Уравнение (3) распадается на два уравнения:

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad (3')$$

и

$$x + \varphi'(p) = 0. \quad (3'')$$

Общее решение уравнения (3') есть

$$p = c;$$

подставляя его в уравнение (2), получим:

$$y = cx + \varphi(c). \quad (4)$$

Соотношение (4) и представляет общее решение данного уравнения Клеро (1), так как связывает независимую переменную x и искомую функцию y и содержит произвольную постоянную c .

Замечаем, что для получения общего решения (4) уравнения Клеро (1) достаточно производную $\frac{dy}{dx}$ в уравнении Клеро заменить произвольной постоянной c .

Из уравнения (4), линейного относительно x и y , видно, что семейство интегральных линий уравнения Клеро есть семейство прямых, зависящее от одного параметра.

Воспользовавшись уравнением (3''), находим:

$$x = -\varphi'(p).$$

Подставив это в уравнение (2), получим:

$$y = -\varphi'(p)p + \varphi(p).$$

Таким образом, кроме общего решения (4), мы имеем еще одно решение уравнения Клеро:

$$\begin{aligned} x &= -\varphi'(p), \\ y &= -\varphi'(p)p + \varphi(p). \end{aligned} \quad (5)$$

Это решение не содержится в общем решении, т. е. не получается из формулы общего решения (4) ни при каком числовом значении c , поэтому оно называется особым решением.

Если из уравнений (5) параметр p исключить, то особое решение уравнения Клеро будет выражаться соотношением вида

$$F(x, y) = 0. \quad (6)$$

Нетрудно заметить, что особый интеграл (6) можно получить исключением c из системы уравнений:

$$\begin{aligned} y &= cx + \varphi(c), \\ x + \varphi'(c) &= 0, \end{aligned} \quad (5')$$

первое из которых есть общий интеграл уравнения Клеро, а второе получается из первого дифференцированием по c (взятием частной производной по c от обеих частей первого уравнения). В самом деле, чтобы получить систему уравнений (5'), достаточно в системе (5) параметр p обозначить буквой c . Поэтому результат исключения p из системы (5) и результат исключения c из системы (5') есть одно и то же соотношение (6), представляющее особый интеграл уравнения Клеро.

Пример. Решить уравнение

$$y = xy' + y'^2.$$

Решение Подставив в данное уравнение, являющееся уравнением Клеро, вместо y' произвольную постоянную c , мы получим его общее решение:

$$y = cx + c^2.$$

Чтобы найти особое решение, исключим c из системы уравнений:

$$\begin{aligned} y &= cx + c^2, \\ x + 2c &= 0, \end{aligned}$$

где второе уравнение получено из первого дифференцированием по c . С этой целью из второго уравнения найдем:

$$c = -\frac{x}{2}$$

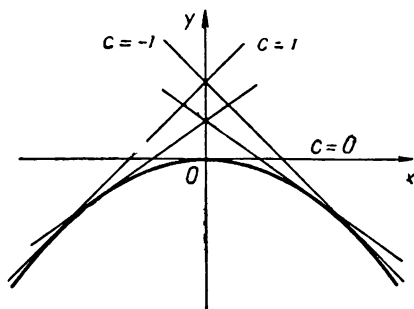
и подставим в первое уравнение:

$$y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4}$$

Следовательно, особое решение данного дифференциального уравнения выражается формулой:

$$y = -\frac{x^2}{4}$$

и геометрически представляет параболу, тогда как семейство интегральных линий, которое выражается общим решением, есть семейство прямых.



Черт. 64

На чертеже 64 показано взаимное расположение семейства интегральных линий — прямых и особой интегральной кривой — параболы. Парабола в каждой своей точке касается одной из прямых, составляющих семейство интегральных линий.

§ 3. Особые решения

1. Здесь мы рассмотрим вопрос об особом решении дифференциального уравнения в общей постановке.

Особым решением дифференциального уравнения $f(x, y, y') = 0$ называется такое решение этого уравнения, если в каждой точке его графика (особой интегральной кривой) нарушено условие единственности решения.

Таким образом, для каждой точки особой интегральной кривой можно найти еще интегральную кривую, проходящую через эту точку.

Понятие особого решения дифференциального уравнения связано с понятием огибающей семейства кривых.

Огибающей семейства плоских кривых, зависящего от одного параметра, называется такая кривая, которая в каждой своей точке касается одной из кривых семейства, причем имеет касание с каждой кривой семейства.

Если существует огибающая семейства интегральных кривых дифференциального уравнения $f(x, y, y')=0$, то эта огибающая представляет особое решение данного уравнения.

В самом деле, совокупность трех чисел (x, y, y') в любой точке M огибающей относится одновременно и к точке M частной интегральной кривой семейства, проходящей через эту точку, а в точках интегральной кривой совокупность чисел (x, y, y') удовлетворяет данному дифференциальному уравнению; следовательно, при движении точки M по огибающей совокупность чисел (x, y, y') для M все время удовлетворяет данному дифференциальному уравнению, а это и означает, что огибающая представляет решение этого уравнения.

То, что огибающая семейства интегральных кривых представляет особое решение, следует из того, что через каждую точку огибающей проходит не одна интегральная линия, так как, кроме самой огибающей, являющейся интегральной линией, через эту точку проходит также и та интегральная кривая семейства, которой в этой точке касается огибающая, поэтому во всех точках огибающей условие единственности решения нарушено.

2. Рассмотрим вопрос о том, как по уравнению семейства кривых найти огибающую этого семейства, если она существует.

Пусть дано семейство плоских кривых, зависящее от одного параметра, уравнением

$$F(x, y, c)=0, \quad (1)$$

где $F(x, y, c)$ — непрерывная функция от трех аргументов, имеющая частные производные F'_x, F'_y, F'_c .

Пусть данное семейство кривых имеет огибающую.

Каждая точка $M(x, y)$ огибающей является точкой касания с некоторой определенной кривой семейства, соответствующей определенному значению параметра c . При изменении параметра c точка M будет перемещаться по огибающей. Поэтому текущие координаты огибающей являются функциями параметра c :

$$\begin{aligned} x &= \varphi(c), \\ y &= \psi(c). \end{aligned} \quad (2)$$

Следовательно, чтобы найти огибающую данного семейства кривых (1), достаточно найти функции $\varphi(c)$ и $\psi(c)$,

ибо тогда уравнения (2) и будут определять искомую огибающую в параметрической форме.

Чтобы найти функции $\varphi(c)$ и $\psi(c)$, мы прежде всего учтем, что каждая точка M огибающей лежит на одной из кривых данного семейства (1), поэтому, подставляя в уравнение (1) вместо x и y соответственно $\varphi(c)$ и $\psi(c)$, мы получим тождество:

$$F[\varphi(c), \psi(c), c] = 0.$$

Дифференцируя это тождество по c , получим:

$$F'_x[\varphi(c), \psi(c), c]\varphi'(c) + F'_y[\varphi(c), \psi(c), c]\psi'(c) + F'_c[\varphi(c), \psi(c), c] = 0. \quad (3)$$

Затем мы воспользуемся тем условием, что огибающая в каждой точке M имеет общую касательную с кривой семейства, проходящей через точку M . Поэтому в точке $M[\varphi(c), \psi(c)]$ угловой коэффициент k касательной к огибающей равен угловому коэффициенту k_1 касательной к соответствующей кривой семейства.

Для определения k надо взять производную $\frac{dy}{dx}$ из уравнений (2), считая их параметрическим выражением огибающей, а для определения k_1 надо взять $\frac{dy}{dx}$ из уравнения $F(x, y, c) = 0$, выражающего кривую семейства, проходящую через точку M , причем в обоих случаях надо взять значение $\frac{dy}{dx}$ в точке M .

Следовательно,

$$k = \frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)}, \quad k_1 = - \frac{F'_x[\varphi(c), \psi(c), c]}{F'_y[\varphi(c), \psi(c), c]}$$

и мы имеем:

$$\frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)} = - \frac{F'_x[\varphi(c), \psi(c), c]}{F'_y[\varphi(c), \psi(c), c]},$$

или

$$F'_x[\varphi(c), \psi(c), c]\varphi'(c) + F'_y[\varphi(c), \psi(c), c]\psi'(c) = 0. \quad (4)$$

Итак, функции $\varphi(c)$ и $\psi(c)$ должны удовлетворять одновременно условиям (3) и (4). Сопоставляя эти условия, замечаем, что $\varphi(c)$ и $\psi(c)$ должны удовлетворять условию

$$F'_c[\varphi(c), \psi(c), c] = 0.$$

Таким образом, координаты x и y любой точки M огибающей семейства (1) должны удовлетворять уравнению $F(x, y, c) = 0$ (где c — значение параметра, соответствующее точке M), так как точка M лежит на кривой семейства, и вместе с тем уравнению $F'_c(x, y, c) = 0$ (c — то же самое значение параметра, соответствующее M). Следовательно, уравнение огибающей в параметрической форме (2) мы получим, решив систему

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0, \\ F'_c(x, y, c) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

относительно x и y .

Если исключить параметр c из системы (5), то мы получим одно уравнение вида

$$\Phi(x, y) = 0, \quad (6)$$

которое связывает координаты x и y любой точки M огибающей и поэтому является уравнением огибающей в прямоугольных координатах.

Отсюда следует, что если

$$F(x, y, c) = 0 \quad (1^*)$$

есть общий интеграл уравнения $f(x, y, y') = 0$, то для получения особого интеграла данного дифференциального уравнения надо исключить параметр c из системы уравнений:

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0, \\ F'_c(x, y, c) = 0. \end{cases} \quad (5^*)$$

Действительно, если семейство интегральных линий (1*) имеет огибающую, то, исключив c из системы (5*), мы получим ее уравнение:

$$\Phi(x, y) = 0; \quad (6^*)$$

так как огибающая семейства интегральных линий представляет особое решение, то функция $y(x)$, которая определяется уравнением (6*), и будет особым решением данного дифференциального уравнения.

Можно показать, что не только огибающая семейства (1*), но и некоторые другие кривые, не являющиеся интегральными линиями, также получаются исключением параметра c из системы (5*). Поэтому каждый раз надо

проверять, удовлетворяет ли функция $y(x)$, определенная уравнением (6*) или системой (5*), данному дифференциальному уравнению.

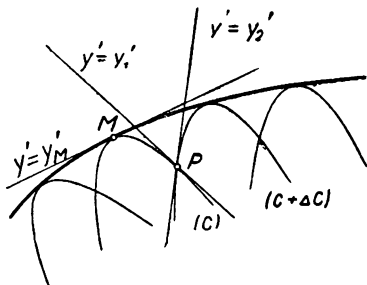
3. Остановимся еще на таком способе отыскания особого интеграла дифференциального уравнения, который не требует знания общего интеграла этого уравнения.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$f(x, y, y') = 0. \quad (7)$$

левая часть которого представляет многочлен, если ее рассматривать как функцию одного переменного y' .

Пусть семейство интегральных линий уравнения (7) имеют огибающую, и поэтому существует особое решение данного дифференциального уравнения. В этом случае интегральные линии, соответствующие достаточно близким значениям параметра c , пересекаются (черт. 65).



Черт. 65

Пусть P есть точка пересечения двух интегральных линий, одна из которых соответствует некоторому фиксированному значению c , а другая — значению параметра $c + \Delta c$. Подставив в уравнение (7) вместо x и y координаты точки P и рассматривая его как уравнение относительно неизвестного числа y' , замечаем, что оно будет иметь два корня: y'_1 и y'_2 , представляющие угловые коэффициенты касательных к кривым (c) и $(c + \Delta c)$. Если же в уравнение (7) подставить вместо x и y координаты точки огибающей, например точки M , к которой стремится P при $\Delta c \rightarrow 0$, то получается один корень y'_m , так как в точке M касательная к интегральным линиям только одна (это — прямая, к положению которой стремятся касательные в точке P к кривым (c) и $(c + \Delta c)$ при $\Delta c \rightarrow 0$ и $P \rightarrow M$). Следовательно, y'_m есть кратный корень уравнения (7), так как это уравнение будет одной и той же степени относительно y' , независимо от того, возьмем ли в нем x и y равными координатам точки P или координатам точки M . Но кратный корень многочлена будет одновременно и корнем производной этого многочлена.

Поэтому, если под x и y понимать координаты какой угодно точки M огибающей, то одно и то же y' будет удовлетворять двум уравнениям: $f(x, y, y')=0$ и $f_{y'}(x, y, y')=0$.

Отсюда следует, что уравнение огибающей семейства интегральных линий — особый интеграл данного дифференциального уравнения (7) — можно получить исключением y' из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, y') &= 0, \\ f_{y'}(x, y, y') &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Оказывается, что не только огибающая семейства интегральных линий уравнения (7), но и некоторые другие кривые, не являющиеся интегральными линиями для уравнения (7), также получаются исключением y' из системы (8). Поэтому функцию $y(x)$, определенную уравнением, полученным исключением y' из (8), надо подвергнуть испытанию, удовлетворяет ли она данному дифференциальному уравнению.

Пример 1. Найти общее и особое решения уравнения

$$y = a\sqrt{1 + y'^2}.$$

Решение. Положим $y' = p$. Подставив в данное уравнение, получим:

$$y = a\sqrt{1 + p^2}.$$

Из соотношения $\frac{dy}{dx} = p$ следует $dx = \frac{dy}{p}$. Но

$$dy = a \frac{p dp}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Поэтому

$$dx = a \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}},$$

откуда находим:

$$x = a \int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} + c = a \ln(p + \sqrt{1 + p^2}) + c.$$

Следовательно, общее решение данного уравнения выражается в параметрической форме системой уравнений:

$$\begin{cases} x = a \ln(p + \sqrt{1 + p^2}) + c, \\ y = a\sqrt{1 + p^2}, \end{cases}$$

где параметром служит p .

Исключим параметр p . Для этого из первого уравнения системы выразим p через x и c и подставим во второе уравнение системы. Получим:

$$\begin{aligned} p + \sqrt{1 + p^2} &= e^{\frac{x-c}{a}}, \\ \sqrt{1 + p^2} &= e^{\frac{x-c}{a}} - p, \\ 1 + p^2 &= e^{2\frac{x-c}{a}} - 2pe^{\frac{x-c}{a}} + p^2, \\ p &= \frac{e^{\frac{x-c}{a}} - e^{-\frac{x-c}{a}}}{2}, \\ y &= a \sqrt{1 + \frac{\left(e^{\frac{x-c}{a}} - e^{-\frac{x-c}{a}}\right)^2}{4}} = \\ &= a \frac{\sqrt{e^{2\frac{x-c}{a}} + 2 + e^{-2\frac{x-c}{a}}}}{2} = \\ &= a \frac{\sqrt{\left(e^{\frac{x-c}{a}} + e^{-\frac{x-c}{a}}\right)^2}}{2} = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x-c}{a}} + e^{-\frac{x-c}{a}}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, общее решение данного дифференциального уравнения в явном виде есть

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x-c}{a}} + e^{-\frac{x-c}{a}}\right).$$

Чтобы найти особое решение, продифференцируем по c найденный общий интеграл, выражающий общее решение, и полученное при этом уравнение

$$0 = \frac{a}{2} \left[e^{\frac{x-c}{a}} \left(-\frac{1}{a}\right) + e^{-\frac{x-c}{a}} \frac{1}{a} \right],$$

или

$$e^{-\frac{x-c}{a}} - e^{\frac{x-c}{a}} = 0$$

присоединим к общему интегралу. В результате этого мы получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x-c}{a}} + e^{-\frac{x-c}{a}} \right), \\ e^{-\frac{x-c}{a}} - e^{\frac{x-c}{a}} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

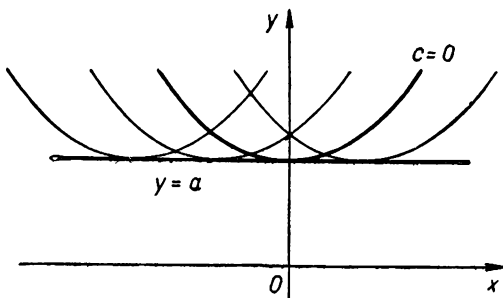
откуда для получения особого решения исключим c . С этой целью решим второе уравнение относительно c :

$$\begin{aligned} e^{\frac{x-c}{a}} &= e^{-\frac{x-c}{a}}, \\ e^{2\frac{x-c}{a}} &= 1, \\ 2\frac{x-c}{a} &= 0, \\ c &= x, \end{aligned}$$

и найденное значение c подставим в первое уравнение. В итоге получим:

$$y = a.$$

Это и есть искомое особое решение, так как оно удовлетворяет данному дифференциальному уравнению, в чем легко убедиться проверкой.



Черт. 66

Уравнения, выражающие общее решение и особое решение, показывают, что семейство интегральных кривых данного дифференциального уравнения есть семейство цепных линий с огибающей, параллельной оси Ox (черт. 66).

Пример 2. Найти особое решение уравнения

$$(xy' - y)^2 = x^2(2y - xy).$$

Решение. Продифференцируем данное уравнение по y' :

$$2(xy' - y)x = -x^4.$$

Присоединив полученное уравнение к данному, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} (xy' - y)^2 = x^3(2y - xy'), \\ 2(xy' - y) = -x^3. \end{cases}$$

Исключим из этой системы y' . Для этого выразим y' через x и y из второго уравнения и подставим в первое:

$$\begin{aligned} xy' - y &= -\frac{x^3}{2}, \\ xy' &= y - \frac{x^3}{2}, \\ y' &= \frac{2y - x^3}{2x}, \\ \left(x \frac{2y - x^3}{2x} - y\right)^2 &= x^3 \left(2y - x \frac{2y - x^3}{2x}\right), \\ \frac{x^6}{4} &= x^3 \frac{2y + x^3}{2}, \\ 4y + x^3 &= 0. \end{aligned}$$

Это уравнение определяет функцию $y = -\frac{x^3}{4}$, удовлетворяющую данному дифференциальному уравнению, в чем убеждаемся проверкой:

$$\begin{aligned} \left[x \left(-\frac{x^3}{4}\right)' - \left(-\frac{x^3}{4}\right)\right]^2 &= x^3 \left[2 \left(-\frac{x^3}{4}\right) - x \left(-\frac{x^3}{4}\right)'\right], \\ \left(-\frac{x^3}{2}\right)^2 &= x^3 \left(\frac{x^3}{4}\right), \\ \frac{x^6}{4} &= \frac{x^6}{4}. \end{aligned}$$

Следовательно, искомое особое решение данного уравнения есть

$$y = -\frac{x^3}{4}.$$

§ 4. Задачи о траекториях

Пусть дано семейство плоских кривых, зависящее от одного параметра.

Кривая, которая в каждой своей точке пересекает кривую данного семейства под постоянным углом, называется

изогональной траекторией данного семейства кривых.

Изогональная траектория, пересекающая кривые данного семейства под прямым углом, называется ортогональной траекторией.

Пусть

$$F(x, y, a) = 0 \quad (1)$$

есть уравнение данного семейства кривых, зависящего от одного параметра a . Поставим себе задачей найти уравнение ортогональных траекторий этого семейства кривых.

Обозначим через $M(X, Y)$ произвольную точку искомой траектории, а через k — угловой коэффициент касательной к этой траектории в той же точке $M(X, Y)$. Если k_1 есть угловой коэффициент касательной в точке $M(X, Y)$ к кривой данного семейства, проходящей через эту точку, то

$$k = -\frac{1}{k_1}, \quad (2)$$

так как искомая траектория и кривая данного семейства пересекаются в точке $M(X, Y)$ под прямым углом.

Угловой коэффициент k_1 равен значению в точке $M(X, Y)$ производной $\frac{dy}{dx}$, вычисленной из уравнения данного семейства кривых (1). Поэтому

$$k_1 = -\frac{F'_x(X, Y, a)}{F'_y(X, Y, a)}.$$

Отсюда в силу соотношения (2) имеем:

$$k = \frac{F'_y(X, Y, a)}{F'_x(X, Y, a)}, \quad (3)$$

где a есть то значение параметра, которое соответствует кривой семейства, проходящей через точку $M(X, Y)$, и которое поэтому определяется уравнением:

$$F(X, Y, a) = 0. \quad (1')$$

Координаты произвольной точки $M(X, Y)$ искомой траектории — текущие координаты X и Y — связаны между собой некоторым уравнением (уравнением траектории).

Поэтому ордината Y является функцией абсциссы X : $Y = Y(X)$, а угловой коэффициент касательной к этой траектории выражается производной $\frac{dY}{dX}$. Так как в точке $M(X, Y)$ этот угловой коэффициент равен k , то в силу равенства (3) в точке $M(X, Y)$ имеем:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{F'_y(X, Y, a)}{F'_x(X, Y, a)}. \quad (3')$$

Таким образом, координаты X и Y любой точки искомой траектории удовлетворяют одновременно условиям (1') и (3'), в которых параметр a имеет одно и то же значение. Следовательно, исключив параметр a из уравнений (1') и (3'), мы получим уравнение вида:

$$f\left(X, Y, \frac{dY}{dX}\right) = 0, \quad (4)$$

представляющее дифференциальное уравнение ортогональных траекторий данного семейства кривых (1).

Общий интеграл уравнения (4) выражается соотношением вида:

$$\Phi(X, Y, C) = 0,$$

где C — произвольная постоянная. Поэтому для данного семейства кривых (1) ортогональные траектории также образуют семейство плоских кривых, зависящее от одного параметра.

Если семейство кривых дано дифференциальным уравнением

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

то нетрудно заметить, что семейство ортогональных траекторий будет выражаться уравнением:

$$\varphi\left(X, Y, -\frac{1}{\frac{dY}{dX}}\right) = 0.$$

Пример. Найти уравнение ортогональных траекторий для семейства прямых, проходящих через начало координат.

Решение. Семейство прямых, проходящих через начало координат, выражается уравнением:

$$y = ax,$$

где a — параметр.

Здесь $F(x, y, a) = ax - y$ и $\frac{F_y'}{F_x'} = -\frac{1}{a}$. Поэтому уравнение искомым ортогональным траекториям мы получим, исключив параметр a из системы уравнений:

$$\begin{aligned} y &= ax, \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{a}. \end{aligned}$$

С этой целью из первого уравнения системы выразим a через x и y :

$$a = \frac{y}{x}$$

и подставим во второе уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Полученное уравнение есть дифференциальное уравнение искомым ортогональным траекториям. Представив это уравнение в виде

$$x dx + y dy = 0$$

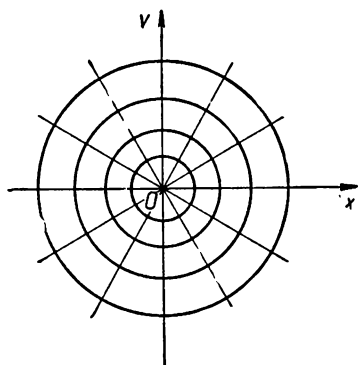
и проинтегрировав его, мы получим:

$$x^2 + y^2 = c.$$

Так как полученное здесь уравнение не имеет геометрического смысла при отрицательных значениях c , то уравнение искомым ортогональным траекториям можно записать в виде

$$x^2 + y^2 = c^2,$$

откуда следует, что для семейства прямых, проходящих через начало координат, ортогональными траекториями являются всевозможные окружности с центром в начале координат (черт. 67).



Черт. 67

УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

§ 1. Теорема существования и единственности

Уравнение вида

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

в котором высшая производная искомой функции $y(x)$ имеет порядок n , называется дифференциальным уравнением n -го порядка.

Задача Коши для уравнения n -го порядка заключается в том, чтобы найти частное решение уравнения

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right), \quad (1)$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$\text{при } x = x_0 \text{ имеем } y = y_0, y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}, \quad (2)$$

где $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ — данные числа.

Чтобы выяснить для уравнения (1) вопрос о существовании и единственности решения, удовлетворяющего начальным условиям (2), мы заменим данное уравнение n -го порядка системой n уравнений первого порядка с n искомыми функциями. С этой целью мы введем вспомогательные функции $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$, положив

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \dots, \quad \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}.$$

Из этих соотношений следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{dy_1}{dx} = y_2, & \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{dy_2}{dx} = y_3, \dots, \\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} &= \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}, & \frac{d^ny}{dx^n} &= \frac{dy_{n-1}}{dx}. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (1) может быть представлено в виде

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}).$$

Следовательно, задание уравнения (1) с начальными условиями (2) равносильно заданию системы уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= y_1, \\ \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dy_{n-2}}{dx} &= y_{n-1}, \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}),\end{aligned}\tag{1'}$$

с начальными условиями: при $x = x_0$ имеем

$$y = y_0, y_1 = y'_0, \dots, y_{n-1} = y_0^{(n-1)}.\tag{2'}$$

Так как правые части первых $n - 1$ уравнений системы (1'), если их рассматривать как функции от $x, y, y_1, \dots, y_{n-1}$, непрерывны по всем аргументам и имеют по аргументам $y, y_1, \dots, y_{n-1}$ ограниченные частные производные (равные либо 1, либо 0), то условие существования и единственности решения системы (1'), удовлетворяющего начальным данным (2'), сводится к тому, чтобы функция $f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})$ была непрерывна как функция $n + 1$ переменных $x, y, y_1, \dots, y_{n-1}$ и удовлетворяла условию Липшица по аргументам $y, y_1, \dots, y_{n-1}$.

Учитывая связь между системой (1') с начальными условиями (2'), с одной стороны, и уравнением (1) с начальными условиями (2), с другой стороны, а также принимая во внимание теорему существования и единственности для системы дифференциальных уравнений, мы можем теперь сформулировать следующую теорему существования и единственности решения уравнения n -го порядка.

Теорема. Если правая часть $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ дифференциального уравнения n -го порядка (1), разрешенного относительно старшей производной $y^{(n)}$, непрерывна как функция от $n + 1$ переменных $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ и удовлетворяет условию Липшица по аргументам $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, то существует единственное решение данного уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2).

Заметим, что условие Липшица для уравнения (1) будет заведомо выполнено, если правая часть этого уравнения — функция $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ — имеет ограниченные частные

производные по аргументам $y, y', \dots, y^{(n-1)}$. Это прямо следует из аналогичного замечания для системы уравнений первого порядка, если учесть, что правые части первых $n-1$ уравнений системы (1'), к которой мы свели уравнение (1), имеют ограниченные производные по $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, как это было замечено выше.

Если при фиксированном x_0 в начальных условиях (2) мы будем менять параметры $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, то мы будем получать различные частные решения уравнения (1). Множество всех частных решений уравнения (1) образует общее решение уравнения (1).

Геометрически общее решение уравнения (1) представляет семейство интегральных кривых, которое зависит от n параметров, что видно из начальных условий (2).

Отсюда следует, что общее решение уравнения n -го порядка выражается соотношением вида

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n),$$

где $c_1, c_2, \dots, c_n$ — произвольные постоянные.

Соотношение вида

$$\Phi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0,$$

выражающее общее решение уравнения n -го порядка в неявной форме, мы будем называть общим интегралом уравнения.

§ 2. Некоторые виды уравнений, допускающих понижение порядка

1. Уравнение вида

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x). \quad (A)$$

Это уравнение интегрируется в квадратурах.

В самом деле, $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ является первообразной по отношению к $\frac{d^n y}{dx^n}$, а значит, в силу (A) и первообразной по отношению к $f(x)$, поэтому

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int f(x) dx + c_1,$$

где c_1 — произвольная постоянная, а $\int f(x) dx$ есть любая первообразная для $f(x)$, которую мы обозначим через $f_1(x)$. Таким образом, для искомой функции y мы имеем уравнение:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = f_1(x) + c_1$$

такого же вида, как и исходное уравнение (A), но уже порядка $n - 1$.

Рассматривая это уравнение как исходное, мы получим:

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int f_1(x) dx + c_1x + c_2,$$

или, обозначая $\int f_1(x) dx$ через $f_2(x)$,

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = f_2(x) + c_1x + c_2.$$

Как видим, с каждым шагом порядок уравнения понижается на единицу, а вид уравнения остается прежним. Через n шагов мы получим:

$$y = f_n(x) + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \dots + c_{n-1}x + c_n.$$

Это и есть общее решение данного дифференциального уравнения (A).

Пример. Решить уравнение

$$y''' \sin^3 x = 2 \cos x.$$

Решение. Представив данное уравнение в виде

$$y''' = \frac{2 \cos x}{\sin^3 x},$$

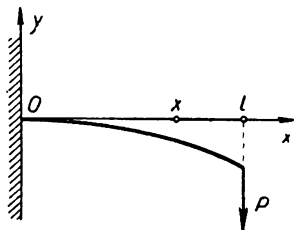
последовательным интегрированием найдем:

$$\begin{aligned} y'' &= 2 \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx + c_1 = -\frac{1}{\sin^2 x} + c_1, \\ y' &= -\int \frac{dx}{\sin^2 x} + c_1x + c_2 = \operatorname{ctg} x + c_1x + c_2, \\ y &= \int \operatorname{ctg} x dx + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2x + c_3 = \\ &= \ln |\sin x| + \frac{c_1}{2} x^2 + c_2x + c_3. \end{aligned}$$

Произвольную постоянную $\frac{c_1}{2}$ обозначим через c_1 . Тогда общее решение данного уравнения выразится формулой:

$$y = \ln |\sin x| + c_1 x^2 + c_2 x + c_3.$$

Пример 2. Однородная горизонтальная балка длины l с одинаковым поперечным сечением всюду закреплена в левом конце и находится под действием вертикальной силы P , приложенной к правому концу балки и направленной вниз (черт. 68). Найти уравнение изогнутой оси балки и вычислить прогиб балки в ее правом конце.



Черт. 68

Решение. Возьмем прямоугольную систему координат, направив ось Ox по горизонтальной оси балки, а ось Oy — вертикально вверх через левый конец балки.

В механике доказывается, что при небольшом изгибе балки линия изогнутой оси балки выражается дифференциальным уравнением

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M_x,$$

где E — модуль Юнга для вещества балки, I — момент инерции площади поперечного сечения балки относительно оси балки, M_x — изгибающий момент в сечении с абсциссой x , который равняется сумме моментов относительно точки x всех сил, расположенных справа от сечения.

При данных условиях E и I — постоянные, которые мы будем считать известными для рассматриваемой балки, а изгибающий момент в сечении с абсциссой x равен

$$M_x = -P(l - x)$$

(знак минус объясняется тем, что сила P направлена вниз).

Следовательно, уравнение изогнутой оси балки есть

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P}{EI}(l - x).$$

Интегрируя, находим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI} \frac{(l-x)^2}{2} + c_1,$$

$$y = -\frac{P}{EI} \frac{(l-x)^3}{6} + c_1 x + c_2.$$

Так как левый конец балки закреплен, то $y(0) = 0$. Кроме того, ось Ox (горизонтальное положение оси балки) является касательной к изогнутой оси балки в левом конце, поэтому $y'(0) = 0$. Таким образом, мы имеем начальные условия:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Пользуясь первым условием, находим:

$$c_2 = \frac{Pl^3}{6EI}.$$

Второе условие дает

$$c_1 = -\frac{Pl^2}{2EI}.$$

Следовательно, при данных условиях ось балки расположится по линии, которая выражается уравнением:

$$y = -\frac{P}{EI} \left[\frac{(l-x)^3}{6} + \frac{l^2 x}{2} - \frac{l^3}{6} \right].$$

Величина прогиба балки равна

$$y(l) = -\frac{Pl^3}{3EI}.$$

2. Уравнение вида

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0. \quad (B)$$

Характерным для уравнения (B) является то, что переменная y не входит в него явно.

В уравнении (B) положим $\frac{dy}{dx} = p$ и, значит, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, тогда получим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$f\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0. \quad (1)$$

Пусть

$$p = \varphi(x, c_1) \quad (2)$$

есть общее решение уравнения (1). Заменяя в левой части (2) p обратно через $\frac{dy}{dx}$, получим уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, c_1),$$

рассмотренного выше вида (A). Отсюда находим:

$$y = \int \varphi(x, c_1) dx + c_2.$$

Это и есть общее решение данного уравнения (B). В случае уравнения более общего вида:

$$f\left(x, \frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right) = 0 \quad (B^*)$$

надо положить

$$\frac{d^ny}{dx^n} = p.$$

Пример 1. Решить уравнение

$$(1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0.$$

Решение. Положим, $y' = p$. Из этого следует, что $y'' = \frac{dp}{dx}$. Подставив в данное уравнение, получим:

$$(1+x^2)\frac{dp}{dx} + p^2 + 1 = 0.$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p^2+1} + \frac{dx}{1+x^2} &= 0, \\ \int \frac{dp}{p^2+1} + \int \frac{dx}{1+x^2} &= c, \\ \operatorname{arctg} p + \operatorname{arctg} x &= c, \\ p &= \operatorname{tg}(c - \operatorname{arctg} x), \\ p &= \frac{c_1 - x}{1 + c_1 x}. \end{aligned}$$

Заменяв p через y' , получим уравнение первого порядка относительно y :

$$y' = \frac{c_1 - x}{1 + c_1 x},$$

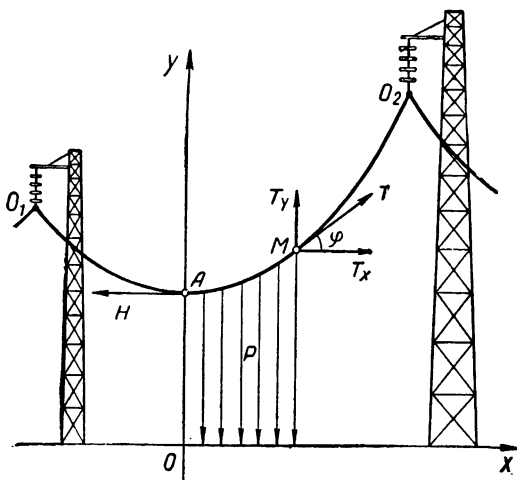
откуда, интегрируя, найдем:

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{c_1 - x}{1 + c_1 x} dx + c_2 = -\frac{1}{c_1} \int \frac{c_1 x - c_1^2}{c_1 x + 1} dx + c_2 = \\ &= -\frac{1}{c_1} \int \left(1 - \frac{c_1^2 + 1}{c_1 x + 1} \right) dx + c_2 = \\ &= -\frac{x}{c_1} + \left(1 + \frac{1}{c_1^2} \right) \ln \left(x + \frac{1}{c_1} \right) + c_2. \end{aligned}$$

Обозначим произвольную постоянную $\frac{1}{c_1}$ через c_1 . Тогда общее решение данного уравнения получим в виде

$$y = (1 + c_1^2) \ln(x + c_1) - c_1 x + c_2.$$

Пример 2. Гибкий провод линии электропередачи закреплен в точках O_1 и O_2 . Найти уравнение кривой, по которой расположится провод $O_1 O_2$ под действием своего веса.



Черт. 69

Решение. Провод мы будем рассматривать как материальную линию с постоянной линейной плотностью μ .

Возьмем прямоугольную систему координат, направив ось Ox горизонтально, а ось Oy — вертикально через самую низкую точку A провода (черт. 69).

Рассмотрим произвольную точку $M(x, y)$ провода. Участок AM провода находится в равновесии под действием трех сил:

1) горизонтального натяжения H , приложенного к точке A и производимого участком O_1A провода;

2) натяжения T , приложенного к точке M , направленного по касательной и производимого участком MO_2 провода;

3) силы, направленной книзу и равной весу P куска AM провода.

Разложим T на горизонтальную и вертикальную составляющие, которые обозначим соответственно через T_x и T_y .

Так как участок AM провода находится в равновесии, то вертикальная сила P , направленная вниз, по абсолютной величине должна равняться вертикальной силе T_y , направленной вверх: $P = T_y$; то же самое относится к направленным в противоположные стороны горизонтальным силам H и T_x : $H = T_x$. Отсюда, замечая, что

$$T_x = T \cos \varphi, \quad T_y = T \sin \varphi, \quad P = \mu s,$$

где s — длина дуги AM провода, мы имеем:

$$T \sin \varphi = \mu s, \quad T \cos \varphi = H.$$

Разделив почленно первое равенство на второе, мы получим:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\mu s}{H}.$$

Так как

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx},$$

то мы имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu s}{H}.$$

Дифференцируя по x обе части этого равенства и принимая во внимание, что μ и H — постоянные, а производная длины дуги кривой выражается формулой

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

мы получим уравнение:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

связывающее координаты x и y произвольной точки искомой линии.

Это уравнение — дифференциальное. Чтобы его решить, положим $\frac{dy}{dx} = p$, тогда $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$. Подставив в дифференциальное уравнение, получим:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{H} \sqrt{1 + p^2},$$

или

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{\mu}{H} dx.$$

Интегрируя, найдем:

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{\mu}{H} x + c_1.$$

Так как в точке A имеем $x=0$ и $p = \frac{dy}{dx} = 0$ (касательная в точке A параллельна оси Ox), то из последнего соотношения находим:

$$c_1 = 0.$$

Поэтому

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{\mu}{H} x.$$

Разрешим это равенство относительно p :

$$\begin{aligned} p + \sqrt{1 + p^2} &= e^{\frac{\mu}{H} x}, \\ \sqrt{1 + p^2} &= e^{\frac{\mu}{H} x} - p, \\ 1 + p^2 &= e^{2\frac{\mu}{H} x} - 2pe^{\frac{\mu}{H} x} + p^2, \\ p &= \frac{e^{\frac{\mu}{H} x} - e^{-\frac{\mu}{H} x}}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $p = \frac{dy}{dx}$, имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\mu}{H} x} - e^{-\frac{\mu}{H} x} \right).$$

Интегрируя это уравнение, получим:

$$y = \frac{H}{2\mu} \left(e^{\frac{\mu}{H} x} + e^{-\frac{\mu}{H} x} \right) + c_2.$$

Пусть мы горизонтальную ось Ox выбрали так, что $OA = \frac{H}{\mu}$, и поэтому точка A имеет координаты: $x=0$, $y = \frac{H}{\mu}$. Подставляя эти координаты в последнее уравнение, мы найдем:

$$c_2 = 0.$$

Следовательно, в выбранной системе координат уравнение

$$y = \frac{H}{2\mu} \left(e^{\frac{\mu}{H}x} + e^{-\frac{\mu}{H}x} \right),$$

или, полагая $\frac{H}{\mu} = a$,

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

есть уравнение линии, по которой расположится под действием своего веса провод, закрепленный в концах.

3. Уравнение вида

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0. \quad (C)$$

Это уравнение не содержит явно переменной x .

Положим,

$$\frac{dy}{dx} = p.$$

Тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}.$$

Если p и $\frac{dp}{dx}$ мы подставим в уравнение (C) вместо $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, то получим уравнение, содержащее три переменные: x , y и p . Поэтому, заметив, что $dx = \frac{dy}{p}$, вторую производную от y мы выразим через p и y :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy}.$$

Теперь, подставляя значения $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ в исходное уравнение (C), мы получим уравнение:

$$f\left(y, p, p \frac{dp}{dy}\right) = 0, \quad (3)$$

связывающее две переменные — p и y .

Уравнение (3) — первого порядка. Пусть его общее решение есть

$$p = \psi(y, c_1).$$

Тогда, заменяя p обратно через $\frac{dy}{dx}$, получим уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \psi(y, c_1),$$

в котором переменные разделяются:

$$\frac{dy}{\psi(y, c_1)} = dx.$$

Интегрируя, находим:

$$\int \frac{dy}{\psi(y, c_1)} = x + c_2.$$

Это и есть общий интеграл данного уравнения (С).

Уравнение более общего вида

$$f\left(\frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}, \frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}\right) = 0 \quad (C^*)$$

приводится подстановкой

$$\frac{d^ny}{dx^n} = z$$

к уравнению вида (С)

$$f\left(z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}\right) = 0.$$

Если для последнего уравнения удастся найти общее решение

$$z = F(x, c_1, c_2),$$

то общее решение уравнения (С*) будет получено интегрированием уравнения

$$\frac{d^ny}{dx^n} = F(x, c_1, c_2),$$

рассмотренного выше вида (А).

Пример. Решить уравнение

$$y''y^{IV} - 2y'''^2 = 0.$$

Решение. Положим в данном уравнении $y'' = z$. Тогда получим уравнение второго порядка:

$$z \frac{d^2 z}{dx^2} - 2 \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 = 0.$$

Это — уравнение вида (С). Для интегрирования его положим $\frac{dz}{dx} = p$, откуда следует: $\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dz} p$. Подставив в уравнение относительно z , получим:

$$zp \frac{dp}{dz} - 2p^2 = 0.$$

После разделения переменных будем иметь:

$$\frac{dp}{p} - \frac{2dz}{z} = 0.$$

Интегрируя, получим:

$$\ln p - 2 \ln z = \ln c_1,$$

$$p = c_1 z^2.$$

Подставив вместо p производную $\frac{dz}{dx}$, получим уравнение относительно z :

$$\frac{dz}{dx} = c_1 z^3.$$

Отсюда имеем:

$$\frac{dz}{z^3} = c_1 dx,$$

$$\frac{1}{z} = c_1 x + c_2,$$

$$z = \frac{1}{c_1 x + c_2}.$$

Но $z = y''$. Поэтому для определения y мы имеем уравнение:

$$y'' = \frac{1}{c_1 x + c_2}.$$

Решая это уравнение последовательным интегрированием, получим:

$$\begin{aligned} y' &= \int \frac{dx}{c_1 x + c_2} + c_3 = \frac{1}{c_1} \ln(c_1 x + c_2) + c_3, \\ y &= \frac{1}{c_1} \int \ln(c_1 x + c_2) dx + c_3 x + c_4 = \\ &= \frac{x}{c_1} \ln(c_1 x + c_2) - \frac{1}{c_1} \int \frac{c_1 x dx}{c_1 x + c_2} + c_3 x + c_4 = \\ &= \frac{x}{c_1} \ln(c_1 x + c_2) - \frac{x}{c_1} + \frac{c_2}{c_1^2} \ln(c_1 x + c_2) + c_3 x + c_4 = \\ &= \frac{c_1 x + c_2}{c_1^2} \ln(c_1 x + c_2) + \left(c_3 - \frac{1}{c_1}\right) x + c_4. \end{aligned}$$

Каким бы ни было число c_1 , в силу произвольности постоянной c_3 будет произвольной постоянной и разность $c_3 - \frac{1}{c_1}$; обозначим ее через c_3 . Тогда общее решение данного дифференциального уравнения выразится формулой:

$$y = \frac{c_1 x + c_2}{c_1^2} \ln(c_1 x + c_2) + c_3 x + c_4.$$

Г Л А В А V

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

§ 1. Определения. Свойства линейного дифференциального оператора

Уравнение вида

$$\frac{d^n y}{dx^n} + k_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + k_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + k_n(x) y = f(x), \quad (I)$$

где $[k_1(x), k_2(x), \dots, k_n(x)]$ и $f(x)$ — известные функции от x , называется линейным дифференциальным уравнением n -го порядка.

Искомая функция y и ее производные $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$ содержатся в этом уравнении только в первой степени, почему и называется уравнение линейным.

Пусть коэффициенты $k_1(x)$, $k_2(x)$, ..., $k_n(x)$ и правая часть $f(x)$ уравнения (I) непрерывны в некотором интервале (a, b) . Уравнение (I) можно разрешить относительно старшей производной и представить в виде

$$y^{(n)} = -k_1(x)y^{(n-1)} - \dots - k_{n-1}(x)y' - k_n(x)y + f(x).$$

Правая часть этого уравнения, если ее рассматривать как функцию от $n+1$ аргументов $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$, непрерывна при всех $x \in (a, b)$ и любых значениях $y, y', \dots, y^{(n-1)}$; ее частные производные по $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, соответственно равные $-k_n(x), -k_{n-1}(x), \dots, -k_1(x)$, ограничены на любом отрезке $[\alpha, \beta]$, содержащемся в интервале (a, b) ; поэтому существует единственное решение $y(x)$ уравнения (I), удовлетворяющее начальным условиям: при $x_0 \in (a, b)$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

где $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ — любые данные числа (гл. IV, § 1, задача Коши).

Коэффициенты $k_1(x), k_2(x), \dots, k_n(x)$, а также и правая часть уравнения (I) могут быть постоянными и, в частности, равными нулю.

Если $f(x) \equiv 0$, то линейное уравнение называется однородным.

Таким образом, однородное линейное уравнение n -го порядка имеет вид

$$\frac{d^n y}{dx^n} + k_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + k_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + k_n(x) y = 0, \quad (II)$$

где коэффициенты $k_1(x), k_2(x), \dots, k_n(x)$ — известные функции; мы будем считать, что все они непрерывны в интервале (a, b) .

Уравнение (I) называется неоднородным линейным уравнением n -го порядка, если его правая часть $f(x)$ не есть тождественный нуль.

Для простоты обозначим:

$$L[y] \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + k_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + k_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + k_n(x) y.$$

$L[y]$ называется линейным дифференциальным оператором и обозначает результат применения к функции y всех операций, указанных в правой части этого тождества.

Пользуясь оператором $L[y]$, можно записать неоднородное линейное уравнение (I) в виде

$$L[y] = f(x),$$

а однородное линейное уравнение — в виде

$$L[y] = 0.$$

Отметим два свойства, которыми обладает линейный дифференциальный оператор $L[y]$.

Первое свойство выражается соотношением:

$$L[cy] = cL[y], \quad (A)$$

где c — какая угодно постоянная, а y — любая n раз дифференцируемая функция.

В самом деле,

$$\frac{d(cy)}{dx} = c \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2(cy)}{dx^2} = c \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n(cy)}{dx^n} = c \frac{d^ny}{dx^n},$$

поэтому

$$L[cy] = c \left[\frac{d^ny}{dx^n} + k_1(x) \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + k_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + k_n(x) y \right] = cL[y].$$

Второе свойство выражается соотношением:

$$L[y_1 + y_2 + \dots + y_m] = L[y_1] + L[y_2] + \dots + L[y_m]. \quad (B)$$

где $y_1, y_2, \dots, y_m$ — любые n раз дифференцируемые функции.

В самом деле,

$$\frac{d^s}{dx^s} (y_1 + y_2 + \dots + y_m) = \frac{d^sy_1}{dx^s} + \frac{d^sy_2}{dx^s} + \dots + \frac{d^sy_m}{dx^s},$$

($s = 1, 2, \dots, n$), поэтому

$$\begin{aligned} L[y_1 + y_2 + \dots + y_m] &= \\ &= \left(\frac{d^ny_1}{dx^n} + \frac{d^ny_2}{dx^n} + \dots + \frac{d^ny_m}{dx^n} \right) + \\ &+ k_1(x) \left(\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} + \dots + \frac{d^{n-1}y_m}{dx^{n-1}} \right) + \\ &\dots \dots \dots \\ &+ k_n(x) (y_1 + y_2 + \dots + y_m); \end{aligned}$$

группируя слагаемые правой части по столбикам, получим:

[illegible]

§ 2. Свойства однородных линейных уравнений

Прежде всего мы рассмотрим однородное линейное уравнение

$$L[y]=0. \quad (\text{II})$$

Пользуясь свойствами (А) и (В) линейного дифференциального оператора $L[y]$, докажем две теоремы, выражающие свойства однородных линейных уравнений.

Теорема 1. Если функция y_1 является решением однородного линейного уравнения (II), то и cy_1 , где c — любая постоянная, также есть решение уравнения (II).

Доказательство. В силу свойства (A) оператора $L[y]$ имеем:

$$L[cy_1] = cL[y_1].$$

Ho

$$L[y_1] \equiv 0,$$

так как по условию y_1 — решение уравнения (II).

Следовательно,

$$L[cy_1] \equiv 0,$$

а это и означает, что функция cu_1 есть решение уравнения (II).

Теорема 2. Если функции $y_1, y_2, \dots, y_m$ являются решениями однородного линейного уравнения (II), то и сумма $y_1 + y_2 + \dots + y_m$ есть решение уравнения (II).

Доказательство. В силу свойства (B) оператора $L[y]$ имеем:

$$L[y_1 + y_2 + \dots + y_m] = L[y_1] + L[y_2] + \dots + L[y_m].$$

Но

$$L[y_1] \equiv 0, \quad L[y_2] \equiv 0, \quad \dots, \quad L[y_m] \equiv 0,$$

так как по условию $y_1, y_2, \dots, y_m$ являются решениями уравнения (II).

Следовательно,

$$L[y_1 + y_2 + \dots + y_m] \equiv 0,$$

а это и означает, что функция $y_1 + y_2 + \dots + y_m$ есть решение уравнения (II).

Следствие. Если $y_1, y_2, \dots, y_m$ — решения уравнения $L[y] = 0$, то и $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_m y_m$, где $c_1, c_2, \dots, c_m$ — любые постоянные, также есть решение этого уравнения.

§ 3. Общее решение. Фундаментальная система. Определитель Вронского

В свойстве однородного линейного уравнения, сформулированном в конце предыдущего параграфа (следствие), содержится указание на структуру общего решения этого уравнения.

Пусть мы нашли n частных решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ однородного линейного уравнения n -го порядка

$$L[y] = 0. \quad (\text{II})$$

Тогда

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n, \quad (1)$$

где $c_1, c_2, \dots, c_n$ — произвольные постоянные, также есть решение уравнения (II). Кроме того, учитывая, что общее решение уравнения n -го порядка характеризуется наличием в нем n произвольных постоянных, мы можем ожидать, что решение (1) общее.

Однако оказывается, что это не всегда так. Например, если возьмем $y_n = 2y_1$ (что возможно, так как в силу теоремы 1 одновременно с y_1 будет решением уравне-

где $y_{i0} = y_i(x_0)$, $y_{i0}^{(s)} = y_i^{(s)}(x_0)$. А это требует, чтобы определитель системы (2) был отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} & \dots & y_{n0} \\ y'_{10} & y'_{20} & \dots & y'_{n0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{10}^{(n-1)} & y_{20}^{(n-1)} & \dots & y_{n0}^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В качестве x_0 мы могли взять какую угодно точку интервала (a, b) . Поэтому приходим к следующему выводу: соотношение (1) содержит любое частное решение уравнения (II) и, значит, представляет общее решение уравнения (II) в том и только в том случае, когда в интервале (a, b) определитель

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

не равен нулю.

Определитель $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ называется определителем Вронского или вронскианом.

Система частных решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ однородного линейного уравнения (II), удовлетворяющая в интервале (a, b) условию $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0$, называется фундаментальной системой.

Таким образом, доказана следующая теорема, являющаяся здесь основной.

Теорема. Если $y_1, y_2, \dots, y_n$ — фундаментальная система частных решений однородного линейного уравнения n -го порядка $L[y] = 0$, то общее решение этого уравнения выражается формулой

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n,$$

где $c_1, c_2, \dots, c_n$ — произвольные постоянные.

Нетрудно убедиться в том, что для каждого однородного линейного уравнения (II) существует фундаментальная система частных решений.

В самом деле, определим частные решения $y_1, y_2, \dots, y_n$ уравнения (II) следующими начальными условиями:

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= 1, & y_1'(x_0) &= 0, & y_1''(x_0) &= 0, & \dots, & y_1^{(n-1)}(x_0) &= 0; \\ y_2(x_0) &= 0, & y_2'(x_0) &= 1, & y_2''(x_0) &= 0, & \dots, & y_2^{(n-1)}(x_0) &= 0; \\ & \dots & & & & & & & \\ y_n(x_0) &= 0, & y_n'(x_0) &= 0, & \dots, & y_n^{(n-2)}(x_0) &= 0, & y_n^{(n-1)}(x_0) &= 1; \end{aligned}$$

тогда вронскиан $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$, составленный из этих решений, при $x = x_0$ имеет значение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Следовательно, $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0$, и поэтому $y_1, y_2, \dots, y_n$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (II).

§ 4. Понятие линейной независимости функций

Функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ называются линейно независимыми в интервале (a, b) , если тождество

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0, \quad a < x < b \quad (1)$$

имеет место только тогда, когда числа $c_1, c_2, \dots, c_n$ все равны нулю.

Если же тождество (1) верно и при таком выборе чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$, когда среди них есть хотя бы одно, не равное нулю, то функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ называются линейно зависимыми в интервале (a, b) .

Линейная зависимость n функций означает, что одна функция может быть представлена в виде линейной комбинации остальных функций с постоянными коэффициентами. В самом деле, пусть $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейно зависимые. Тогда в тождестве

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0$$

числа $c_1, c_2, \dots, c_n$ можно выбрать так, чтобы не все они были равны нулю. Пусть, например, $c_1 \neq 0$. В этом случае мы имеем тождество:

$$y_1 = -\frac{c_2}{c_1} y_2 - \frac{c_3}{c_1} y_3 - \dots - \frac{c_n}{c_1} y_n,$$

где коэффициенты $-\frac{c_2}{c_1}, -\frac{c_3}{c_1}, \dots, -\frac{c_n}{c_1}$ — постоянные.

Обратно, если одна из n функций может быть представлена в виде линейной комбинации остальных функций с постоянными коэффициентами, то данные n функций линейно зависимы.

Действительно, пусть

$$y_1 \equiv c_2 y_2 + c_3 y_3 + \dots + c_n y_n,$$

где $c_2, c_3, \dots, c_n$ — постоянные. Тогда имеет место тождество:

$$(-1)y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0,$$

в котором коэффициент при y_1 не равен нулю; поэтому функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейно зависимы.

Заметим, наконец, что если одна из данных функций $y_1, y_2, \dots, y_n$ тождественно равна нулю, то данные функции линейно зависимы.

Пусть, например, $y_1 \equiv 0$. Тогда тождество

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0$$

имеет место при $c_1 \neq 0, c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$, т. е. тогда, когда не все числа $c_1, c_2, \dots, c_n$ равны нулю, а это и означает, что $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейно зависимы.

Пример. Доказать, что функции

$$y_1 = 1, \quad y_2 = x, \quad y_3 = x^2, \dots, \quad y_n = x^{n-1}$$

линейно независимы в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Решение. Допустим, что данные функции линейно зависимы. Тогда найдутся такие числа $c_1, c_2, \dots, c_n$, не все равные нулю, что равенство

$$c_1 + c_2 x + \dots + c_n x^{n-1} = 0$$

будет выполняться при всех значениях x . Но это неверно, так как многочлен степени $n-1$ имеет не более $n-1$ действительных корней, в силу чего указанное равенство верно только в конечном числе точек.

§ 5. Условие линейной независимости решений однородного линейного уравнения

Здесь мы докажем две теоремы, которые выясняют условие линейной независимости частных решений однородного линейного уравнения.

Теорема 1. Пусть функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ в интервале (a, b) имеют производные до $n - 1$ -го порядка включительно. Если $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейно зависимы в интервале (a, b) , то вронскиан, составленный из них, тождественно равен нулю в этом интервале.

Доказательство. Пусть $y_1, y_2, \dots, y_n$ в интервале (a, b) линейно зависимы. Тогда найдутся такие числа $c_1, c_2, \dots, c_n$, не все равные нулю, что будет верно тождество:

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0, \quad a < x < b. \quad (1)$$

Продифференцировав тождество (1) $n - 1$ раз, мы будем иметь n соотношений:

$$\begin{aligned} c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n &= 0, \\ c_1 y_1' + c_2 y_2' + \dots + c_n y_n' &= 0, \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)} + c_2 y_2^{(n-1)} + \dots + c_n y_n^{(n-1)} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

которые выполняются при любом x из интервала (a, b) .

Возьмем в соотношениях (2) значение x равным произвольному числу из промежутка (a, b) и будем рассматривать эти равенства (2) при выбранном x как систему n линейных однородных уравнений относительно $c_1, c_2, \dots, c_n$. Так как заранее известно, что существует ненулевое решение системы (2) (не все c_i равны нулю), то определитель системы должен быть равным нулю. Но этот определитель есть вронскиан $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ в рассматриваемой точке $x \in (a, b)$.

Следовательно, вронскиан, составленный из данных функций $y_1, y_2, \dots, y_n$, линейно зависимых в интервале (a, b) , равен нулю в каждой точке x этого интервала, т. е. верно тождество:

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] = 0, \quad a < x < b,$$

что и требовалось доказать.

Нетрудно заметить, что это решение удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$\bar{y}(x_0) = 0, \quad \bar{y}'(x_0) = 0, \quad \dots, \quad \bar{y}^{(n-1)}(x_0) = 0. \quad (6)$$

В самом деле, для функции $\bar{y}$, определенной формулой (5), мы имеем:

$$\begin{aligned} \bar{y}(x_0) &= \bar{c}_1 y_{10} + \bar{c}_2 y_{20} + \dots + \bar{c}_n y_{n0}, \\ \bar{y}'(x_0) &= \bar{c}_1 y'_{10} + \bar{c}_2 y'_{20} + \dots + \bar{c}_n y'_{n0}, \\ &\vdots \\ \bar{y}^{(n-1)}(x_0) &= \bar{c}_1 y^{(n-1)}_{10} + \bar{c}_2 y^{(n-1)}_{20} + \dots + \bar{c}_n y^{(n-1)}_{n0}. \end{aligned}$$

Но правые части во всех этих соотношениях равны нулю, так как $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n$ удовлетворяют уравнениям (4).

Заметим затем, что функция

$$\tilde{y} \equiv 0,$$

очевидно, также является решением однородного линейного уравнения (II) и удовлетворяет тем же начальным условиям (6), что и решение (5).

Следовательно, в силу единственности решения уравнения (II), удовлетворяющего данным начальным условиям, частные решения $\bar{y}$ и $\tilde{y}$ совпадают, т. е. верно тождество

$$\bar{c}_1 y_1 + \bar{c}_2 y_2 + \dots + \bar{c}_n y_n = 0, \quad a < x < b. \quad (7)$$

Полученное тождество (7), в котором не все числа $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n$ равны нулю, показывает, что $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейно зависимы, а это противоречит условию.

Полученное прстиворечие опровергает правильность допущения и доказывает, что вронскиан $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$, составленный из линейно независимых решений уравнения (II), ни в одной точке интервала (a, b) не равен нулю.

Из доказанных здесь двух теорем вытекают следствия, имеющие важное значение при изучении однородных линейных дифференциальных уравнений.

Следствие 1. Если вронскиан $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$, составленный из частных решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ однородного линейного уравнения (II), не равен нулю по крайней мере в одной точке $x_0 \in (a, b)$, то он отличен от нуля в каждой точке $x \in (a, b)$.

В самом деле, если при $x = x_0$ вронскиан $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ не равен нулю, то $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейно независимы в интервале (a, b) , так как в противном случае в силу теоремы 1 мы имели бы в интервале (a, b) тождество $W[y_1, y_2, \dots, y_n] = 0$. В свою очередь из линейной независимости $y_1, y_2, \dots, y_n$ следует по теореме 2, что вронскиан $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ ни в одной точке интервала (a, b) не равен нулю.

Следствие 2. Для того чтобы частные решения $y_1, y_2, \dots, y_n$ однородного линейного уравнения (II) были линейно независимы в интервале (a, b) , необходимо и достаточно, чтобы вронскиан $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ был отличным от нуля (в одной, а значит, и во всех точках интервала (a, b)).

Достаточность этого условия вытекает из того, что при линейной зависимости $y_1, y_2, \dots, y_n$ согласно теореме 1 имеем: $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \equiv 0$; поэтому если $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0$, то функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ не могут быть линейно зависимыми, т. е. они в этом случае линейно независимы.

Необходимость условия прямо следует из теоремы 2.

Следствие 3. Фундаментальная система частных решений однородного линейного уравнения n -го порядка есть система n линейно независимых частных решений этого уравнения.

Правильность этого утверждения следует из того, что для частных решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ однородного линейного уравнения (II) одно и то же условие

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0$$

является как условием их линейной независимости, так и условием, когда они образуют фундаментальную систему решений уравнения (II).

§ 6. Формула Остроградского

Рассмотрим однородное линейное уравнение второго порядка:

$$y'' + k_1(x)y' + k_2(x)y = 0. \quad (1)$$

Пусть y_1, y_2 — фундаментальная система частных решений данного уравнения (1). Тогда мы имеем тождества:

$$\begin{aligned} y_1'' + k_1(x) y_1' + k_2(x) y_1 &= 0, \\ y_2'' + k_1(x) y_2' + k_2(x) y_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Соотношения (2) будем рассматривать как систему линейных неоднородных уравнений относительно $k_1(x)$ и $k_2(x)$. Определитель этой системы, т. е. определитель, составленный из множителей при $k_1(x)$ и $k_2(x)$, не равен нулю. Действительно, он равен

$$\begin{vmatrix} y_1' & y_1 \\ y_2' & y_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = -W[y_1, y_2],$$

но $W[y_1, y_2] \neq 0$, так как y_1 и y_2 составляют фундаментальную систему решений уравнения (1); поэтому

$$\begin{vmatrix} y_1' & y_1 \\ y_2' & y_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Отсюда следует, что система уравнений (2) относительно $k_1(x)$ и $k_2(x)$ имеет определенное решение и в силу известного из алгебры способа решения системы неоднородных линейных уравнений имеем:

$$\begin{aligned} k_1(x) &= \frac{\begin{vmatrix} -y_1'' & y_1 \\ -y_2'' & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1' & y_1 \\ y_2' & y_2 \end{vmatrix}} = \frac{y_2'' y_1 - y_1'' y_2}{-W[y_1, y_2]} = \frac{(y_1 y_2' - y_1' y_2)'}{-W[y_1, y_2]} = \\ &= \frac{\frac{d}{dx} W[y_1, y_2]}{-W[y_1, y_2]}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{dW[y_1, y_2]}{W[y_1, y_2]} = -k_1(x) dx,$$

откуда, интегрируя, получим:

$$\ln W[y_1, y_2] = - \int k_1(x) dx + \ln c,$$

а после упрощений —

$$W[y_1, y_2] = ce^{-\int k_1(x) dx}. \quad (3)$$

Соотношение (3) называется формулой Остроградского.

Покажем, пользуясь формулой Остроградского, что если известно одно частное решение $y_1 \neq 0$ однородного линейного уравнения второго порядка, то это уравнение интегрируется в квадратурах.

Пусть $y_1 \neq 0$ есть решение уравнения (1). Обозначим через y_2 любое решение этого же уравнения, линейно независимое с y_1 . Тогда y_1 и y_2 образуют фундаментальную систему решений уравнения (1), поэтому по формуле Остроградского имеем:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = ce^{-\int k_1(x) dx},$$

или

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = ce^{-\int k_1(x) dx}.$$

Отсюда, разделив обе части этого равенства на y_1^2 и заметив, что

$$\frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right),$$

получим:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) = \frac{c}{y_1^2} e^{-\int k_1(x) dx}.$$

Дальше, интегрируя, найдем:

$$y_2 = y_1 \left[\int \frac{c}{y_1^2} e^{-\int k_1(x) dx} dx + c' \right],$$

где постоянное слагаемое c' можно взять любым, поэтому мы положим $c' = 0$.

Так как для уравнения 2-го порядка общее решение получается из фундаментальной системы частных решений y_1 и y_2 по формуле $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, где c_1 и c_2 — произвольные постоянные, то общее решение данного уравнения (1) выразится соотношением:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_1 \int \frac{c}{y_1^2} e^{-\int k_1(x) dx} dx,$$

или, обозначив произвольную постоянную $c_2 c$ просто через c_2 , формулой:

$$y = y_1 \left[c_1 + c_2 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int k_1(x) dx} dx \right].$$

Это и доказывает, что уравнение (1), если известно его частное решение $y_1 \neq 0$, интегрируется в квадратурах.

§ 7. Неоднородное линейное уравнение

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение n -го порядка

$$L[y] = f(x). \quad (I)$$

Однородное линейное уравнение

$$L[y] = 0, \quad (II)$$

которое получится, если в уравнении (I) правую часть $f(x)$ заменить нулем, мы будем называть уравнением, соответствующим данному неоднородному линейному уравнению (I).

Следующая теорема выясняет структуру общего решения неоднородного линейного уравнения.

Теорема. Для того чтобы получить общее решение неоднородного линейного уравнения (I), достаточно к общему решению соответствующего однородного линейного уравнения (II) прибавить какое-нибудь частное решение данного уравнения (I).

Доказательство. Пусть Y есть какое-нибудь частное решение неоднородного линейного уравнения (I), а u — общее решение соответствующего однородного линейного уравнения (II). Тогда

$$L[Y] \equiv f(x), \quad L[u] \equiv 0.$$

Так как в силу известного свойства линейного оператора

$$L[u + Y] = L[u] + L[Y],$$

то мы имеем:

$$L[u + Y] \equiv f(x),$$

а это означает, что функция

$$y = u + Y \quad (1)$$

есть решение уравнения (I).

Заметим, наконец, что формула (1) выражает общее решение.

В самом деле, u есть общее решение уравнения (II), имеющего тот же порядок n , что и уравнение (I), поэтому в выражении для u и, следовательно, в выражении $y = u + Y$ содержится n произвольных постоянных, явля-

ющихся существенными, что и характерно для общего решения уравнения n -го порядка.

Для строгого доказательства того, что решение уравнения (I), выраженное формулой (1), общее, мы докажем, что любое частное решение уравнения (I) можно получить из этой формулы (1) надлежащим выбором значений, входящих в формулу произвольных постоянных.

С этой целью формулу (1) представим в виде

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n + Y, \quad (1')$$

где $y_1, y_2, \dots, y_n$ — фундаментальная система решений уравнения (II), а $c_1, c_2, \dots, c_n$ — произвольные постоянные.

Чтобы из соотношения (1') получить любое частное решение $y(x)$ уравнения (I), удовлетворяющее любым данным начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

надо в этом соотношении значения $c_1, c_2, \dots, c_n$ выбрать так, чтобы они удовлетворяли следующей системе неоднородных линейных уравнений:

$$\begin{aligned} c_1 y_{10} + c_2 y_{20} + \dots + c_n y_{n0} + Y_0 &= y_0, \\ c_1 y'_{10} + c_2 y'_{20} + \dots + c_n y'_{n0} + Y'_0 &= y'_0, \\ \vdots & \\ c_1 y^{(n-1)}_{10} + c_2 y^{(n-1)}_{20} + \dots + c_n y^{(n-1)}_{n0} + Y^{(n-1)}_0 &= y^{(n-1)}_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $y_{i0} = y_i(x_0)$, $y^{(s)}_{i0} = y^{(s)}_i(x_0)$, $Y_0 = Y(x_0)$, $Y^{(s)}_0 = Y^{(s)}(x_0)$. Но такие $c_1, c_2, \dots, c_n$ действительно существуют, так как определитель системы (2) не равен нулю, ибо он является значением в точке x_0 вронскиана $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$, составленного из фундаментальной системы. Поэтому система (2) имеет, причем единственное, решение $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Итак, любое частное решение уравнения (I) содержится в формуле (1'). Следовательно, формула (1') выражает общее решение уравнения (I), что и доказывает теорему.

Таким образом, для того чтобы решить неоднородное линейное уравнение, надо, во-первых, решить соответствующее однородное линейное уравнение и, во-вторых, найти какое-нибудь частное решение данного неоднородного линейного уравнения.

Следующая теорема позволяет в некоторых случаях упростить задачу отыскания частного решения неоднородного линейного уравнения.

Теорема. Если $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ являются решениями соответственно уравнений

$$L[y] = f_1(x), L[y] = f_2(x), \dots, L[y] = f_m(x),$$

левые части которых представляют одно и то же выражение $L[y]$, то

$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m$$

есть решение уравнения

$$L[y] = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_m(x)$$

с той же левой частью $L[y]$.

Доказательство. Так как известно, что

$$L[Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m] = L[Y_1] + L[Y_2] + \dots + L[Y_m]$$

и, кроме того,

$$L[Y_i] \equiv f_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

ибо Y_i есть решение уравнения $L[y] = f_i(x)$, то мы имеем:

$$L[Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m] \equiv f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_m(x),$$

что и доказывает теорему.

§ 8. Метод вариации произвольных постоянных

Здесь мы рассмотрим метод составления частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения, когда фундаментальная система решений соответствующего однородного линейного уравнения известна.

Пусть дано неоднородное линейное уравнение n -го порядка

$$L[y] = f(x). \quad (I)$$

Пусть мы нашли фундаментальную систему частных решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ соответствующего однородного линейного уравнения

$$L[y] = 0. \quad (II)$$

Тогда общее решение уравнения (II) есть $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$, где $c_1, c_2, \dots, c_n$ — произвольные постоянные.

Чтобы составить общее решение уравнения (I), надо, как уже известно, еще найти какое-нибудь частное решение этого же уравнения (I).

Частное решение Y уравнения (I) будем искать в форме общего решения уравнения (II), т. е. тоже в виде суммы $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$. Но, так как при любых постоянных $c_1, c_2, \dots, c_n$ эта сумма является решением уравнения (II) и поэтому не может удовлетворять уравнению (I), $c_1, c_2, \dots, c_n$ будем искать среди функций (таким образом, постоянные $c_1, c_2, \dots, c_n$ мы превращаем в переменные — варьируем).

Итак, мы поставим себе задачей найти такие функции $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$, чтобы формула

$$Y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 + \dots + c_n(x) y_n \quad (1)$$

выражала решение уравнения (I).

Чтобы найти n функций $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$, надо составить систему из n уравнений, содержащих искомые функции. При составлении этой системы n уравнений мы можем $n - 1$ уравнений взять произвольно и затем составить n -ое уравнение, исходя из требования, чтобы функция Y , определенная формулой (1), удовлетворяла уравнению (I).

В качестве первых $n - 1$ уравнений возьмем следующие:

$$\begin{aligned} c'_1(x) y_1 + c'_2(x) y_2 + \dots + c'_n(x) y_n &= 0, \\ c'_1(x) y'_1 + c'_2(x) y'_2 + \dots + c'_n(x) y'_n &= 0, \\ \dots &\dots \\ c'_1(x) y_1^{(n-2)} + c'_2(x) y_2^{(n-2)} + \dots + c'_n(x) y_n^{(n-2)} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Целесообразность такого выбора уравнений выяснится из дальнейшего.

Для составления n -го уравнения подставим Y в уравнение (I). С этой целью предварительно найдем производные Y до n -го порядка.

При первом дифференцировании получим:

$$Y' = c_1(x) y'_1 + c_2(x) y'_2 + \dots + c_n(x) y'_n + [c'_1(x) y_1 + c'_2(x) y_2 + \dots + c'_n(x) y_n].$$

Сумма в квадратных скобках равна нулю в силу первого из соотношений (2). Поэтому Y' выражается суммой только первых n слагаемых (т. е. так, как если бы $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$ были постоянными; этим и объясняется целесообразность выбора первого из соотношений (2)).

Учитывая это, при втором дифференцировании получим:

$$Y'' = c_1(x) y_1'' + c_2(x) y_2'' + \dots + c_n(x) y_n'' + \\ + [c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2' + \dots + c_n'(x) y_n'],$$

где сумма в квадратных скобках равна нулю в силу второго из соотношений (2).

Продолжая дифференцирование дальше, получим:

$$Y^{(n-1)} = c_1(x) y_1^{(n-1)} + c_2(x) y_2^{(n-1)} + \dots + c_n(x) y_n^{(n-1)} + \\ + [c_1'(x) y_1^{(n-2)} + c_2'(x) y_2^{(n-2)} + \dots + c_n'(x) y_n^{(n-2)}],$$

где в силу последнего из соотношений (2) сумма в квадратных скобках опять равна нулю.

Наконец, дифференцируя еще раз, получим:

$$Y^{(n)} = c_1(x) y_1^{(n)} + c_2(x) y_2^{(n)} + \dots + c_n(x) y_n^{(n)} + \\ + [c_1'(x) y_1^{(n-1)} + c_2'(x) y_2^{(n-1)} + \dots + c_n'(x) y_n^{(n-1)}].$$

Здесь сумму в квадратных скобках мы уже не можем считать равной нулю.

Итак, мы имеем:

$$Y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 + \dots + c_n(x) y_n, \\ Y' = c_1(x) y_1' + c_2(x) y_2' + \dots + c_n(x) y_n', \quad (3)$$

$$\dots \dots \dots \\ Y^{(n-1)} = c_1(x) y_1^{(n-1)} + c_2(x) y_2^{(n-1)} + \dots + c_n(x) y_n^{(n-1)}, \\ Y^{(n)} = c_1(x) y_1^{(n)} + c_2(x) y_2^{(n)} + \dots + c_n(x) y_n^{(n)} + \\ + [c_1'(x) y_1^{(n-1)} + c_2'(x) y_2^{(n-1)} + \dots + c_n'(x) y_n^{(n-1)}].$$

Умножая значения $Y, Y', \dots, Y^{(n-1)}, Y^{(n)}$, выраженные соотношениями (3), соответственно на коэффициенты $k_n(x), k_{n-1}(x), \dots, k_1(x), 1$ уравнения (I) и складывая по столбикам, мы получим:

$$L[Y] \equiv c_1(x) L[y_1] + c_2(x) L[y_2] + \dots + c_n(x) L[y_n] + \\ + c_1'(x) y_1^{(n-1)} + c_2'(x) y_2^{(n-1)} + \dots + c_n'(x) y_n^{(n-1)}.$$

Так как

$$L[y_1] = 0, L[y_2] = 0, \dots, L[y_n] = 0,$$

ибо $y_1, y_2, \dots, y_n$ — решения однородного линейного уравнения (II), то

$$L[Y] \equiv c_1'(x) y_1^{(n-1)} + c_2'(x) y_2^{(n-1)} + \dots + c_n'(x) y_n^{(n-1)}.$$

Следовательно, чтобы функция Y удовлетворяла уравнению (I), т. е. имело место тождество

$$L[Y] = f(x),$$

надо на функции $c_1(x)$, $c_2(x)$, ..., $c_n(x)$ наложить условие в виде соотношения

$$c'_1(x) y_1^{(n-1)} + c'_2(x) y_2^{(n-1)} + \dots + c'_n(x) y_n^{(n-1)} = f(x). \quad (4)$$

Это соотношение (4) и надо присоединить к системе (2) в качестве n -го уравнения относительно искомых функций $c_1(x)$, $c_2(x)$, ..., $c_n(x)$.

Рассматривая уравнения (2) и (4) как систему n уравнений относительно $c'_1(x)$, $c'_2(x)$, ..., $c'_n(x)$, мы видим, что эта система линейна и неоднородна, причем определитель системы не равен нулю, так как он является вронскианом, составленным из фундаментальной системы решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ уравнения (II). Из этого следует, что система уравнений (2) и (4) имеет определенную систему решений:

$$c'_1(x), c'_2(x), \dots, c'_n(x).$$

Вычислив их и проинтегрировав, мы получим искомые функции $c_1(x)$, $c_2(x)$, ..., $c_n(x)$.

Заметим, что при интегрировании $c'_i(x)$ мы получим

$$c_i(x) = \int c'_i(x) dx + C_i,$$

где C_i — произвольная постоянная. Какими бы значения постоянных C_i мы ни взяли, всегда при подстановке функций $c_i(x)$ в формулу (1) мы получим решение уравнения (I). Поэтому возьмем $C_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Следовательно,

$$Y = y_1 \int c'_1(x) dx + y_2 \int c'_2(x) dx + \dots + y_n \int c'_n(x) dx \quad (1')$$

есть частное решение уравнения (I).

Наконец, сложив общее решение $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ уравнения (II) и частное решение Y уравнения (I), мы получим формулу:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n + y_1 \int c'_1(x) dx + y_2 \int c'_2(x) dx + \dots + y_n \int c'_n(x) dx,$$

выражающую общее решение данного неоднородного линейного уравнения (I).

Из всего этого следует, что решение неоднородного линейного дифференциального уравнения сводится к решению соответствующего однородного линейного уравнения и квадратурам.

ГЛАВА VI

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1. Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим однородное линейное уравнение

$$L[y] \equiv y^{(n)} + k_1 y^{(n-1)} + \dots + k_{n-1} y' + k_n y = 0, \quad (\text{II})$$

где коэффициенты $k_1, k_2, \dots, k_n$ — постоянные, которые могут быть любыми действительными числами.

В этом случае задача Коши для уравнения (II), очевидно, имеет решение в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Как известно из общей теории линейных уравнений, для составления общего решения y уравнения (II) надо найти фундаментальную систему частных решений этого уравнения, т. е. n линейно независимых решений $y_1, y_2, \dots, y_n$, и затем воспользоваться формулой:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n, \quad (1)$$

где $c_1, c_2, \dots, c_n$ — произвольные постоянные.

Частные решения уравнения (II) мы будем искать в виде показательной функции e^{rx} , где r — постоянное. Такой подход к решению задачи является вполне естественным, так как любая производная от e^{rx} отличается от самой функции e^{rx} только постоянным множителем, поэтому можно надеяться, что при подходящем выборе числа r выражение $L[e^{rx}]$ обратится в нуль в результате приведения подобных членов, а это означало бы, что e^{rx} есть решение уравнения (II).

Дифференцируя функцию e^{rx} , находим:

$$(e^{rx})' = re^{rx}, (e^{rx})'' = r^2 e^{rx}, \dots, (e^{rx})^{(n)} = r^n e^{rx}.$$

Подставив в левую часть уравнения (II) вместо $y, y', \dots, y^{(n)}$ соответственно функцию e^{rx} и ее производные, мы получим:

$$L[e^{rx}] \equiv e^{rx} (r^n + k_1 r^{n-1} + \dots + k_{n-1} r + k_n).$$

Так как $e^{rx} \neq 0$, то отсюда видно, что тождество $L[e^{rx}] = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда r есть корень многочлена

$$F(r) \equiv r^n + k_1 r^{n-1} + \dots + k_{n-1} r + k_n.$$

Следовательно, функция e^{rx} будет решением уравнения (II), если r взять равным какому угодно корню уравнения

$$r^n + k_1 r^{n-1} + \dots + k_{n-1} r + k_n = 0. \quad (2)$$

Корни уравнения (2) могут быть и комплексными. Поэтому и значения e^{rx} могут оказаться комплексными.

Производная комплексно-значной функции

$$y = u(x) + iv(x)$$

определяется формулой:

$$y' = u'(x) + iv'(x).$$

Поэтому, если $r = a + bi$, то

$$e^{rx} = e^{(a+bi)x} = e^{ax} e^{ibx} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx)$$

и

$$\begin{aligned} (e^{rx})' &= (e^{ax} \cos bx)' + i (e^{ax} \sin bx)' = \\ &= e^{ax} [(a \cos bx - b \sin bx) + i (a \sin bx + b \cos bx)] = \\ &= e^{ax} [(a + bi) \cos bx + i (a + bi) \sin bx] = \\ &= (a + bi) e^{ax} e^{ibx} = (a + bi) e^{(a+bi)x} = r e^{rx}. \end{aligned}$$

Итак,

$$(e^{rx})' = r e^{rx}$$

и в том случае, когда число r комплексное.

Уравнение (2), или, короче, $F(r) = 0$, которое, как видим, приобретает важное значение, называется характеристическим уравнением для данного дифференциального уравнения (II).

Полезно заметить, что для получения характеристического уравнения (2) дифференциального уравнения (II) достаточно в уравнении (II) производные $y^{(p)}$ искомой функции y заменить через соответствующие степени r^p искомого числа r , а функцию y , считая ее нулевой производной, заменить через $r^0 = 1$.

Характеристическое уравнение (2) является уравнением n -й степени и поэтому имеет n корней. Здесь возможны следующие случаи.

Случай 1. Пусть корни характеристического уравнения (2) попарно различны и равны $r_1, r_2, \dots, r_n$.

В этом случае мы имеем n различных решений уравнения (II):

$$e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}. \quad (3)$$

Докажем, что они линейно независимы и, следовательно, образуют фундаментальную систему.

Воспользовавшись методом рассуждений от противного, допустим, что функции (3) линейно зависимы. Тогда имеет место тождество

$$c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x} = 0, \quad (4)$$

в котором не все c_i равны нулю. Пусть $c_1 \neq 0$ (в тождестве (4) слагаемые всегда можно расположить так, чтобы неравный нулю коэффициент был первым).

Тождество (4) разделим почленно на $e^{r_n x}$ и полученное тождество

$$c_1 e^{(r_1 - r_n)x} + c_2 e^{(r_2 - r_n)x} + \dots + c_{n-1} e^{(r_{n-1} - r_n)x} + c_n = 0$$

продифференцируем. Тогда получим новое тождество:

$$c_1 (r_1 - r_n) e^{(r_1 - r_n)x} + c_2 (r_2 - r_n) e^{(r_2 - r_n)x} + \dots + \\ + c_{n-1} (r_{n-1} - r_n) e^{(r_{n-1} - r_n)x} = 0,$$

которое, обозначая

$$D_1 = c_1 (r_1 - r_n), D_2 = c_2 (r_2 - r_n), \dots, D_{n-1} = c_{n-1} (r_{n-1} - r_n), \\ \delta_1 = r_1 - r_n, \delta_2 = r_2 - r_n, \dots, \delta_{n-1} = r_{n-1} - r_n,$$

можно записать в виде

$$D_1 e^{\delta_1 x} + D_2 e^{\delta_2 x} + \dots + D_{n-1} e^{\delta_{n-1} x} = 0. \quad (5)$$

В этом тождестве $D_1 \neq 0$, так как $c_1 \neq 0$ и $r_1 \neq r_n$; кроме того, $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}$ попарно различны.

Таким образом, в тождестве (5) сохранились характерные особенности тождества (4): есть наравный нулю коэффициент и показатели степеней попарно различны. Но слагаемых в тождестве (5) меньше, чем в тождестве (4).

Следовательно, аналогичными действиями из тождества (5) можно получить новое тождество вида:

$$E_1 e^{\varepsilon_1 x} + E_2 e^{\varepsilon_2 x} + \dots + E_{n-2} e^{\varepsilon_{n-2} x} = 0,$$

где $E_i \neq 0$ и $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$ при $i \neq j$.

Продолжая подобные операции, мы придем в конце концов к тождеству вида

$$R e^{\rho x} = 0, \quad (6)$$

в котором $R \neq 0$. Но $e^{\rho x} \neq 0$, поэтому тождество (6) невозможно.

Полученное противоречие опровергает правильность допущения, что функции (3) линейно зависимы.

Следовательно, если корни $r_1, r_2, \dots, r_n$ характеристического уравнения (2) попарно различны, то соответствующие частные решения (3) уравнения (II) линейно независимы, и поэтому общее решение уравнения (II) выражается формулой:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}, \quad (1)$$

где $c_1, c_2, \dots, c_n$ — произвольные постоянные.

Если характеристическое уравнение (2) имеет один корень, равный комплексному числу $a + bi$, то оно имеет также один корень, равный сопряженному числу $a - bi$, так как коэффициенты уравнения (II) и, следовательно, характеристического уравнения (2) действительные.

В этом случае среди решений (3) уравнения (II) будут:

$$y_1 = e^{(a+bi)x}, \quad y_2 = e^{(a-bi)x}.$$

Пользуясь формулами Эйлера

$$e^{\pm zi} = \cos z \pm i \sin z,$$

решения y_1 и y_2 можно представить так:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{ax} (\cos bx + i \sin bx), \\ y_2 &= e^{ax} (\cos bx - i \sin bx). \end{aligned}$$

Заметим затем, что если функция

$$y = u(x) \pm iv(x)$$

есть решение уравнения (II), то и функции $u(x)$ и $v(x)$ также являются решениями этого уравнения.

В самом деле,

$$L[u \pm iv] \equiv L[u] \pm iL[v],$$

поэтому, если

$$L[u \pm iv] \equiv 0,$$

то

$$L[u] \equiv 0 \text{ и } L[v] \equiv 0.$$

Из этого замечания вытекает, что одновременно с y_1 и y_2 будут решениями уравнения (II) и функции $e^{ax} \cos bx$, $e^{ax} \sin bx$.

Отсюда следует, что если среди корней характеристического уравнения (2) есть пара сопряженных комплексных корней

$$r_{1,2} = a \pm ib,$$

то соответствующие им решения (II) надо взять равными

$$\tilde{y}_1 = e^{ax} \cos bx, \quad \tilde{y}_2 = e^{ax} \sin bx.$$

Полученная при этом система решений будет линейно независимой, так как в противном случае при помощи формул Эйлера мы эту систему привели бы к виду $e^{r_1 x}$, $e^{r_2 x}$, ..., $e^{r_n x}$ и она оказалась бы линейно зависимой, несмотря на то что корни характеристического уравнения r_1 , r_2 , ..., r_n попарно различны, а этого, как уже доказано, не может быть.

Таким образом, та часть $c_1 e^{(a+ib)x} + c_2 e^{(a-ib)x}$ общего решения уравнения (II), которая соответствует паре сопряженных комплексных корней $r_{1,2} = a \pm ib$ характеристического уравнения (2), может быть представлена в виде:

$$e^{ax} (c_1 \cos bx + c_2 \sin bx).$$

Пример 1. Решить уравнение

$$y''' - 4y'' + 3y' = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$r^3 - 4r^2 + 3r = 0.$$

Найдем его корни:

$$r_1 = 0, \quad r_2 = 1, \quad r_3 = 3.$$

Следовательно, общее решение данного уравнения есть

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{3x}.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$y'' + 2y' + 3y = 0.$$

Решение.

$$r^2 + 2r + 3 = 0,$$

$$r_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{2},$$

$$y = e^{-x} (c_1 \cos \sqrt{2} x + c_2 \sin \sqrt{2} x).$$

Пример 3. Решить уравнение

$$y''' + y' = 0.$$

Решение.

$$r^3 + r = 0,$$

$$r_1 = 0, \quad r_{2,3} = \pm i,$$

$$y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x.$$

Случай 2. Пусть m корней характеристического уравнения совпадают:

$$r_1 = r_2 = \dots = r_m.$$

В этом случае решения $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}$ уравнения (II) не составляют фундаментальную систему, так как $e^{r_1 x} \equiv e^{r_2 x} \equiv \dots \equiv e^{r_m x}$, а при совпадении хотя бы двух функций системы, очевидно, система линейно зависима. Так, при $e^{r_1 x} \equiv e^{r_2 x}$ имеем тождество:

$$1 \cdot e^{r_1 x} + (-1) e^{r_2 x} + 0 e^{r_3 x} + \dots + 0 e^{r_n x} = 0,$$

в котором не все коэффициенты равны нулю.

Следовательно, корень характеристического уравнения r_1 кратности m позволяет пока составить только одно решение уравнения (II): $y_1 = e^{r_1 x}$. Здесь возникает задача: найти недостающие $m - 1$ решений уравнения (II). Будем их искать в виде произведения $e^{r_1 x} u$, где u — функция от x , пока еще неизвестная.

Функцию u надо определить так, чтобы имело место тождество:

$$L[e^{r_1 x} u] = 0.$$

С этой целью возьмем:

$$y = e^{r_1 x} u,$$

$$y' = e^{r_1 x} (r_1 u + u'),$$

$$y^{(m)} = e^{r_1 x} \left(r_1^m u + m r_1^{m-1} u' + \frac{m(m-1)}{2!} r_1^{m-2} u'' + \dots + \right. \\ \left. + \frac{m(m-1) \dots [m-(m-1)]}{m!} u^{(m)} \right),$$

$$y^{(n)} = e^{r_1 x} \left(r_1^n u + n r_1^{n-1} u' + \frac{n(n-1)}{2!} r_1^{n-2} u'' + \dots + \right. \\ \left. + \frac{n(n-1) \dots [n-(m-1)]}{m!} r_1^{n-m} u^{(m)} + \dots + u^{(n)} \right).$$

Умножим первую строку на k_n , вторую на k_{n-1} и т. д., последнюю строку на 1 и полученные результаты сложим. Тогда, складывая слагаемые по столбикам, получим: $L[e^{r_1 x} u] \equiv$

$$\equiv e^{r_1 x} \left[F(r_1) u + \frac{F'(r_1)}{1!} u' + \dots + \frac{F^{(m)}(r_1)}{m!} u^{(m)} + \dots + u^{(n)} \right]$$

($F(r)$ есть левая часть характеристического уравнения (2)).

Так как r_1 есть m -кратный корень характеристического уравнения $F(r) = 0$, то мы имеем:

$$F(r_1) = F'(r_1) = \dots = F^{(m-1)}(r_1) = 0, \quad F^{(m)}(r_1) \neq 0.$$

Поэтому, чтобы выполнялось тождество $L[e^{r_1 x} u] \equiv 0$, функция u должна удовлетворять уравнению:

$$\frac{F^{(m)}(r_1)}{m!} u^{(m)} + \dots + u^{(n)} = 0. \quad (7)$$

Очевидно, уравнению (7) удовлетворяет любая функция u , у которой производная m -го порядка тождественно равна 0. Такими функциями, например, являются

$$u_1 = x, \quad u_2 = x^2, \dots, \quad u_{m-1} = x^{m-1},$$

и поэтому в качестве недостающих $m-1$ решений уравнений (II) можно взять функции

$$y_1 = e^{r_1 x} x, \quad y_2 = e^{r_1 x} x^2, \dots, \quad y_m = e^{r_1 x} x^{m-1}.$$

В этом тождестве первый многочлен, равный $P_{\mu_1}(x)(r_1 - r_s) + P'_{\mu_1}(x)$, имеет ту же степень μ_1 , что и первый многочлен $P_{\mu_1}(x)$ в тождестве (9), так как $r_1 - r_s \neq 0$ и степень $P'_{\mu_1}(x)$ ниже степени $P_{\mu_1}(x)$. Степень последнего многочлена $P'_{\mu_s}(x)$ в тождестве (10) ниже степени последнего многочлена $P_{\mu_s}(x)$ в тождестве (9).

Дифференцируя последовательно тождество (10) достаточно много раз, мы на месте последнего многочлена получим 0, а первый многочлен опять окажется степени μ_1 и поэтому не будет равен нулю тождественно. Таким образом, после ряда дифференцирований тождества (10) мы придем к тождеству вида:

$$Q_{\mu_1}(x)e^{\alpha_1 x} + \dots + Q_{\mu_{s-1}}(x)e^{\alpha_{s-1} x} = 0. \quad (11)$$

Это тождество имеет те же характерные особенности, что и тождество (9): первый многочлен $Q_{\mu_1}(x) \neq 0$ имеет степень μ_1 и числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$ попарно различны. Но число членов в тождестве (11) меньше, чем в тождестве (9).

Все операции, которые были применены к тождеству (9), применим теперь к тождеству (11) и т. д. Прделав все это достаточно много раз, мы придем к тождеству вида:

$$R_{\mu_1}(x)e^{\rho x} = 0, \quad (12)$$

в котором $R_{\mu_1}(x) \neq 0$. Но $e^{\rho x} \neq 0$, поэтому полученное тождество (12) невозможно.

Полученное противоречие показывает, что функции (8) — линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений уравнения (II).

Следовательно, если корни характеристического уравнения (2) есть

$$r_1, r_2, \dots, r_s$$

соответственно кратности

$$m_1, m_2, \dots, m_s,$$

то общее решение уравнения (II) выражается формулой:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x} + \dots + c_n x^{m_s-1} e^{r_s x},$$

которая коротко может быть записана в виде:

$$y = P_{m_1-1}(x)e^{r_1 x} + P_{m_2-1}(x)e^{r_2 x} + \dots + P_{m_s-1}(x)e^{r_s x}, \quad (1'')$$

где $P_{m_1-1}(x)$, $P_{m_2-1}(x)$, ..., $P_{m_s-1}(x)$ — многочлены соответственно степени m_1-1 , m_2-1 , ..., m_s-1 , коэффициентами которых являются произвольные постоянные $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Пример. Решить уравнение

$$y^{(5)} + 3y^{(4)} + 3y''' + y'' = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} r^5 + 3r^4 + 3r^3 + r^2 &= 0, \\ r^2(r+1)^3 &= 0, \end{aligned}$$

найдем его корни:

$$r_{1,2} = 0, \quad r_{3,4,5} = -1.$$

По формуле (1'') общее решение данного уравнения есть

$$y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x + c_5 x^2) e^{-x}.$$

Если среди корней характеристического уравнения (2) имеется m -кратная пара сопряженных комплексных корней $a \pm ib$, то этой паре корней соответствуют следующие решения уравнения (II):

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{(a+ib)x}, \quad y_2 = e^{(a-ib)x}, \quad y_3 = x e^{(a+ib)x}, \quad y_4 = x e^{(a-ib)x}, \quad \dots, \\ y_{2m-1} &= x^{m-1} e^{(a+ib)x}, \quad y_{2m} = x^{m-1} e^{(a-ib)x}. \end{aligned}$$

Выше было показано, что вместо $e^{(a+ib)x}$ и $e^{(a-ib)x}$ в фундаментальной системе можно взять функции $e^{ax} \cos bx$ и $e^{ax} \sin bx$. Аналогично можно показать, что вместе с $x^s e^{(a+ib)x}$ и $x^s e^{(a-ib)x}$ ($s=1, 2, \dots, m-1$) будут решениями уравнения (II) и функции $x^s e^{ax} \cos bx$, $x^s e^{ax} \sin bx$, которые могут быть включены в фундаментальную систему.

Таким образом, та часть общего решения уравнения (II), которая соответствует m -кратной паре сопряженных комплексных корней характеристического уравнения (2)

$$r_{1,2}, \dots, r_{2m} = a \pm ib,$$

может быть преобразована к виду:

$$e^{ax} [P_{m-1}(x) \cos bx + Q_{m-1}(x) \sin bx],$$

где $P_{m-1}(x)$ и $Q_{m-1}(x)$ — многочлены $m-1$ -й степени, коэффициенты которых — произвольные постоянные.

Пример. Решить уравнение

$$y^{IV} + 8y'' + 16y = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$r^4 + 8r^2 + 16 = 0, \\ (r^2 + 4)^2 = 0.$$

Его корни равны

$$r_{1,2,3,4} = \pm 2i.$$

Следовательно, общее решение данного уравнения есть

$$y = (c_1 + c_2x) \cos 2x + (c_3 + c_4x) \sin 2x.$$

§ 2. Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Пусть дано неоднородное линейное уравнение:

$$L[y] \equiv y^{(n)} + k_1 y^{(n-1)} + \dots + k_{n-1} y' + k_n y = f(x) \quad (I)$$

с постоянными коэффициентами $k_1, k_2, \dots, k_n$.

Из общей теории линейных уравнений известно, что для получения общего решения уравнения (I) достаточно сложить общее решение соответствующего однородного линейного уравнения

$$L[y] = 0 \quad (II)$$

и какое-нибудь частное решение данного неоднородного линейного уравнения (I).

Общее решение уравнения (II), являющегося в данном случае уравнением с постоянными коэффициентами, составляется при помощи корней характеристического уравнения.

После того как общее решение уравнения (II) будет найдено, частное решение уравнения (I) можно найти методом вариации произвольных постоянных. Однако в некоторых случаях частное решение уравнения (I) может быть найдено более простым путем — способом неопределенных коэффициентов

Рассмотрим этот способ для нескольких видов уравнения (I).

Определитель системы (2) не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} k_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & k_n & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & k_n \end{vmatrix} = k_n^{m+1} \neq 0.$$

Поэтому система уравнений (2) имеет единственное решение $A_0, A_1, \dots, A_m$. Подставив эти числа в выражение $Q_m(x)$ вместо неопределенных коэффициентов, мы получим частное решение уравнения (I₁):

$$Y = Q_m(x). \quad (3)$$

Рассмотрим случай, когда $k_n = 0$, т. е. когда в уравнении (I₁) нет члена, содержащего y явно. Для большей общности положим, кроме того, что $k_{n-1} = k_{n-2} = \dots = k_{n-p+1} = 0$, $k_{n-p} \neq 0$, т. е. низшая производная от y в уравнении есть $y^{(p)}$, и поэтому данное уравнение (I₁) имеет вид:

$$L[y] \equiv y^{(n)} + k_1 y^{(n-1)} + \dots + k_{n-p} y^{(p)} = P_m(x).$$

Положим в этом уравнении $y^{(p)} = z$. Тогда для определения z получим уравнение рассмотренного выше вида:

$$z^{(n-p)} + k_1 z^{(n-p-1)} + \dots + k_{n-p} z = P_m(x).$$

Его частное решение мы найдем в виде многочлена m -й степени: $z = R_m(x)$.

Затем, заменив z через $y^{(p)}$ и проинтегрировав уравнение

$$y^{(p)} = R_m(x),$$

мы получим:

$$y = Q_m(x) x^p + c_1 x^{p-1} + c_2 x^{p-2} + \dots + c_{p-1} x + c_p, \quad (4)$$

где $Q_m(x)$ — некоторый многочлен m -й степени. Формула (4) выражает решение уравнения (I₁) при любых постоянных $c_1, c_2, \dots, c_p$; поэтому мы возьмем их равными нулю.

Следовательно, если в уравнении (I₁) нет члена, содержащего искомую функцию y явно, то частное решение этого уравнения надо искать в виде

$$Y = Q_m(x) x^p, \quad (5)$$

где p равно порядку низшей производной искомой функции y в этом уравнении.

Можно заметить, что p в формуле частного решения Y уравнения (I_1) совпадает также с кратностью корня характеристического уравнения, равного 0.

В самом деле, в том случае, когда $k_n = k_{n-1} = \dots = k_{n-p+1} = 0$, $k_{n-p} \neq 0$ и в выражении Y берется множитель x^p , характеристическое уравнение есть

$$r^n + k_1 r^{n-1} + \dots + k_{n-p} r^p = 0,$$

откуда видно, что в этом случае $r_1, r_2, \dots, r_p = 0$. В том же случае, когда $k_n \neq 0$ и в выражении Y множитель x^p не берется, число 0, очевидно, не может быть корнем характеристического уравнения.

2. Уравнение вида

$$L[y] = P_m(x) e^{ax}. \quad (I_2)$$

Частное решение Y данного уравнения (I_2) будем искать в форме произведения $e^{ax}z$, где z — функция от x , которая должна быть определена из условия, чтобы имело место тождество

$$L[e^{ax}z] = P_m(x) e^{ax}. \quad (6)$$

Возьмем:

$$Y = e^{ax}z,$$

$$Y' = e^{ax}(az + z'),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$Y^{(p)} = e^{ax} \left(a^p z + p a^{p-1} z' + \frac{p(p-1)}{2!} a^{p-2} z'' + \dots + \frac{p(p-1) \dots [p-(p-1)]}{p!} z^{(p)} \right),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$Y^{(n)} = e^{ax} \left(a^n z + n a^{n-1} z' + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} z'' + \dots + z^{(n)} \right).$$

Умножим Y , Y' , ..., $Y^{(n)}$ соответственно на k_n , k_{n-1} , ..., 1 и полученные результаты сложим, группируя слагаемые по столбцам. В сумме получим:

$$\begin{aligned} L[e^{ax}z] &\equiv \\ &\equiv e^{ax} \left\{ F(a)z + \frac{F'(a)}{1!} z' + \dots + \frac{F^{(p)}(a)}{p!} z^{(p)} + \dots + z^{(n)} \right\}, \end{aligned}$$

где $F(a)$ есть многочлен, полученный из левой части характеристического уравнения $F(r)=0$, соответствующего уравнению $L[y]=0$, заменой r на a .

Отсюда следует, что для получения тождества (6) надо функцию z определить уравнением:

$$z^{(n)} + \dots + \frac{F^{(p)}(a)}{p!} z^{(p)} + \dots + F'(a) z' + F(a) z = P_m(x). \quad (7)$$

Уравнение (7) есть неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами, правая часть которого — многочлен, т. е. уравнение рассмотренного выше вида (I_1). Поэтому частное решение уравнения (7) надо искать в виде многочлена m -й степени $Q_m(x)$, если $F(a) \neq 0$, что будет тогда, когда число a не есть корень характеристического уравнения $F(r)=0$; если же число a окажется корнем характеристического уравнения кратности $p \geq 1$, то тогда $F(a)=F'(a)=\dots=F^{(p-1)}(a)=0$, $F^{(p)}(a) \neq 0$ и решение уравнения (7) надо искать в виде $Q_m(x) x^p$.

Из всего этого следует, что частное решение Y уравнения (I_2) надо искать в виде

$$Y = Q_m(x) e^{ax}, \quad (8)$$

если a не есть корень характеристического уравнения соответствующего однородного линейного уравнения, и в виде

$$Y = Q_m(x) x^p e^{ax}, \quad (9)$$

если a есть корень характеристического уравнения кратности $p \geq 1$.

Коэффициенты многочлена $Q_m(x)$ надо сначала взять неопределенными, обозначив их буквами. Затем, подставив Y в уравнение (I_2) и разделив обе части полученного равенства на e^{ax} , определим коэффициенты многочлена $Q_m(x)$ из системы уравнений, составленной путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x из левой и правой частей полученного равенства.

Следует заметить, что уравнение (I_1) представляет частный случай уравнения (I_2) и получается из последнего при $a=0$. С другой стороны, нетрудно заметить, что и формулы (3) и (5) частного решения уравнения (I_1) получаются из формул (8) и (9) частного решения уравнения (I_2), если в них взять $a=0$.

Пример 1. Решить уравнение

$$y'' + y' = x.$$

Решение. Общее решение данного уравнения составим по формуле

$$y = u + Y,$$

где u — общее решение однородного линейного уравнения, соответствующего данному, а Y — частное решение данного уравнения.

Так как корни характеристического уравнения

$$r^2 + r = 0$$

равны $r_1 = 0$ и $r_2 = -1$, то

$$u = c_1 + c_2 e^{-x}.$$

Частное решение Y данного уравнения надо искать в виде

$$Y = (Ax + B)x,$$

так как правая часть уравнения есть многочлен первой степени и, кроме того, число 0 совпадает с одним корнем характеристического уравнения.

Дифференцируя Y , находим:

$$Y' = 2Ax + B, \quad Y'' = 2A.$$

Подставляя в данное уравнение, получим:

$$2A + 2Ax + B = x.$$

Отсюда имеем:

$$\left. \begin{aligned} 2A &= 1, \\ 2A + B &= 0. \end{aligned} \right\} \\ A = \frac{1}{2}, \quad B = -1.$$

Поэтому

$$Y = \frac{x^2}{2} - x.$$

Следовательно, общее решение данного уравнения есть

$$y = \frac{x^2}{2} - x + c_1 + c_2 e^{-x}.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

Решение. Характеристическое уравнение есть

$$r^2 - 2r + 1 = 0.$$

Его корни:

$$r_{1,2} = 1.$$

Поэтому общее решение однородного линейного уравнения, соответствующего данному уравнению, есть

$$u = (c_1 + c_2 x) e^x.$$

В правой части данного уравнения вместо многочлена мы имеем 1, т. е. многочлен нулевой степени; кроме того, коэффициент при x в показателе e^x , равный 1, совпадает с корнем характеристического уравнения, имеющим кратность 2. Поэтому частное решение данного уравнения надо искать в виде

$$Y = Ax^2 e^x.$$

Дифференцируя Y , находим:

$$Y' = (Ax^2 + 2Ax) e^x,$$

$$Y'' = (Ax^2 + 4Ax + 2A) e^x.$$

Подставив в данное уравнение и разделив обе части полученного равенства на e^x , будем иметь:

$$2A = 1,$$

откуда

$$A = \frac{1}{2}.$$

Поэтому частное решение данного уравнения есть

$$Y = \frac{x^2}{2} e^x,$$

а его общее решение выразится формулой:

$$y = \left(c_1 + c_2 x + \frac{x^2}{2} \right) e^x.$$

3. Уравнение вида

$$L[y] = P_m(x) e^{ax} \cos bx.$$

(I₃)

Из формул Эйлера $e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z$ следует, что

$$\cos bx = \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}.$$

Поэтому данное уравнение (I_3) можно представить в виде

$$L[y] = \frac{1}{2} P_m(x) e^{(a+ib)x} + \frac{1}{2} P_m(x) e^{(a-ib)x}.$$

Частное решение Y этого уравнения мы найдем по формуле:

$$Y = Y_1 + Y_2,$$

где Y_1 есть частное решение уравнения

$$L[y] = \frac{1}{2} P_m(x) e^{(a+ib)x},$$

а Y_2 — частное решение уравнения

$$L[y] = \frac{1}{2} P_m(x) e^{(a-ib)x}.$$

Последние два уравнения имеют вид рассмотренного выше уравнения (I_2) . Поэтому, если числа $a \pm ib$ не являются корнями соответствующего характеристического уравнения, Y_1 и Y_2 надо искать в виде

$$\begin{aligned} Y_1 &= Q_m^{(1)}(x) e^{(a+ib)x}, \\ Y_2 &= Q_m^{(2)}(x) e^{(a-ib)x}, \end{aligned}$$

где $Q_m^{(1)}(x)$ и $Q_m^{(2)}(x)$ — многочлены m -й степени.

Отсюда следует, что, когда числа $a \pm ib$ не являются корнями характеристического уравнения однородного линейного уравнения, соответствующего уравнению (I_3) , частное решение Y уравнения (I_3) надо искать в виде

$$Y = e^{ax} [Q_m^{(1)}(x) e^{ibx} + Q_m^{(2)}(x) e^{-ibx}],$$

или, преобразуя правую часть по формулам Эйлера, в виде

$$Y = e^{ax} [R_m^{(1)}(x) \cos bx + R_m^{(2)}(x) \sin bx], \quad (10)$$

где $R_m^{(1)}(x)$ и $R_m^{(2)}(x)$ — многочлены m -й степени.

Если же среди корней характеристического уравнения имеется пара сопряженных комплексных корней, равных $a \pm ib$, имеющих кратность $p \geq 1$, то надо взять

$$\begin{aligned} Y_1 &= Q_m^{(1)}(x) x^p e^{(a+ib)x}, \\ Y_2 &= Q_m^{(2)}(x) x^p e^{(a-ib)x}. \end{aligned}$$

Следовательно, в этом случае частное решение уравнения (I_3) надо искать в виде

$$Y = e^{ax} [R_m^{(1)}(x) \cos bx + R_m^{(2)}(x) \sin bx] x^p. \quad (11)$$

Как и в случаях уравнений (I_1) и (I_2) , рассмотренных выше, многочлены $R_m^{(1)}(x)$ и $R_m^{(2)}(x)$ надо сначала взять с неопределенными коэффициентами, обозначив коэффициенты буквами. Затем, подставив Y в уравнение (I_3) и разделив обе части полученного равенства на e^{ax} , надо многочлен, который получится множителем при $\cos bx$ в левой части, приравнять многочлену $P_m(x)$, а многочлен при $\sin bx$ в левой части приравнять к нулю. После этого составляются уравнения для определения коэффициентов $R_m^{(1)}(x)$ и $R_m^{(2)}(x)$ обычным путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x из левой и правой частей равенства.

Метод отыскания частного решения уравнения (I_3) полностью применим к уравнениям вида:

$$L[y] = P_m(x) e^{ax} \sin bx.$$

В этом нетрудно убедиться, проделав вычисления, аналогичные вычислениям при отыскании частного решения Y уравнения вида (I_3) .

Возьмем уравнение более общего вида

$$L[y] = P_{m_1}(x) e^{ax} \cos bx + P_{m_2}(x) e^{ax} \sin bx, \quad (I_3^*)$$

где $P_{m_1}(x)$ и $P_{m_2}(x)$ — многочлены соответственно степеней m_1 и m_2 .

Частное решение Y этого уравнения мы получим по формуле:

$$Y = Y_1 + Y_2,$$

где Y_1 есть частное решение уравнения

$$L[y] = P_{m_1}(x) e^{ax} \cos bx,$$

а Y_2 — частное решение уравнения

$$L[y] = P_{m_2}(x) e^{ax} \sin bx.$$

Как уже установлено выше, если числа $a \pm ib$ не являются корнями соответствующего характеристического уравнения, то Y_1 и Y_2 определяются формулами:

$$Y_1 = e^{ax} [R_{m_1}^{(1)}(x) \cos bx + R_{m_1}^{(2)}(x) \sin bx],$$

$$Y_2 = e^{ax} [R_{m_2}^{(1)}(x) \cos bx + R_{m_2}^{(2)}(x) \sin bx],$$

где $R_{m_1}^{(1)}(x)$ и $R_{m_1}^{(2)}(x)$ — многочлены степени m_1 , а $R_{m_2}^{(1)}(x)$ и $R_{m_2}^{(2)}(x)$ — многочлены степени m_2 . Из этих формул имеем:

$$Y = e^{ax} \{ [R_{m_1}^{(1)}(x) + R_{m_2}^{(1)}(x)] \cos bx + [R_{m_1}^{(2)}(x) + R_{m_2}^{(2)}(x)] \sin bx \}.$$

Очевидно, что

$$Q_m^{(1)}(x) = R_{m_1}^{(1)}(x) + R_{m_2}^{(1)}(x) \quad \text{и} \quad Q_m^{(2)}(x) = R_{m_1}^{(2)}(x) + R_{m_2}^{(2)}(x)$$

являются многочленами степени m , равной большому из двух чисел m_1 и m_2 .

Отсюда следует, что если числа $a \pm ib$ не являются корнями характеристического уравнения однородного линейного уравнения, соответствующего уравнению (I_3^*) , то частное решение Y уравнения (I_3^*) надо искать в виде

$$Y = e^{ax} [Q_m^{(1)}(x) \cos bx + Q_m^{(2)}(x) \sin bx],$$

где $Q_m^{(1)}(x)$ и $Q_m^{(2)}(x)$ — многочлены с неопределенными коэффициентами и степени m , равной большей из степеней многочленов $P_{m_1}(x)$ и $P_{m_2}(x)$ в правой части уравнения.

Если же числа $a \pm ib$ являются корнями соответствующего характеристического уравнения, имеющими кратность $p \geq 1$, то, очевидно, частное решение Y уравнения (I_3^*) надо искать в виде

$$Y = e^{ax} [Q_m^{(1)}(x) \cos bx + Q_m^{(2)}(x) \sin bx] x^p.$$

Коэффициенты многочленов $Q_m^{(1)}(x)$ и $Q_m^{(2)}(x)$ определяются обычным способом, как и в предыдущих случаях.

Заметим, наконец, что уравнение вида

$$L[y] = P_{m_1}(x) \cos bx + P_{m_2}(x) \sin bx$$

является частным случаем уравнения (I_3^*) , соответствующим случаю $a=0$. Отсюда следует, что частное решение этого уравнения надо искать в виде

$$Y = Q_m^{(1)}(x) \cos bx + Q_m^{(2)}(x) \sin bx,$$

если только числа $\pm ib$ не являются корнями соответствующего характеристического уравнения, и в виде

$$Y = [Q_m^{(1)}(x) \cos bx + Q_m^{(2)}(x) \sin bx] x^p,$$

если числа $\pm ib$ — корни характеристического уравнения кратности $p \geq 1$.

Пример. Решить уравнение

$$y'' + 4y = \cos 3x.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$r^2 + 4 = 0.$$

Его корни:

$$r_{1,2} = \pm 2i.$$

Поэтому общее решение однородного линейного уравнения, соответствующего данному уравнению, есть

$$u = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

Частное решение данного уравнения ищем в виде

$$Y = A \cos 3x + B \sin 3x.$$

Множителя x в выражении Y не будет, так как корни характеристического уравнения, хотя они и мнимые, не равны числам $\pm 3i$.

Дифференцируя Y , найдем:

$$Y' = 3B \cos 3x - 3A \sin 3x,$$

$$Y'' = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x.$$

Подставив в данное уравнение, получим:

$$-5A \cos 3x - 5B \sin 3x = \cos 3x.$$

Отсюда имеем:

$$\left. \begin{aligned} -5A &= 1, \\ -5B &= 0, \end{aligned} \right\}$$

$$A = -\frac{1}{5}, \quad B = 0,$$

$$Y = -\frac{1}{5} \cos 3x.$$

Следовательно, общее решение данного уравнения есть

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{5} \cos 3x.$$

§ 3. Резонанс

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \nu^2 x = \mu \sin \omega t, \quad (1)$$

где ν^2 , μ и ω — данные числа.

Это уравнение, как было показано выше (стр. 227—229), выражает колебательное движение материальной точки при отсутствии сопротивления среды и наличии возмущающей периодической силы.

Общее решение уравнения (1) выражается формулой:

$$x = u + X,$$

где u есть общее решение соответствующего однородного линейного уравнения:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \nu^2 x = 0, \quad (2)$$

а X — частное решение данного уравнения (1).

Характеристическое уравнение для уравнения (2) есть

$$r^2 + \nu^2 = 0.$$

Его корни равны

$$r_{1,2} = \pm \nu i.$$

Поэтому

$$u = c_1 \cos \nu t + c_2 \sin \nu t, \quad (3)$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

В формулу (3) введем новые произвольные постоянные a и δ , положив

$$c_1 = a \cos \nu \delta, \quad c_2 = a \sin \nu \delta.$$

Это мы можем сделать, так как при любых значениях c_1 и c_2 существуют соответствующие a и δ ;

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \delta = \frac{1}{\nu} \operatorname{arctg} \frac{c_2}{c_1}.$$

Тогда соотношение (3) примет вид:

$$u = a \cos \nu (t - \delta). \quad (3')$$

Если $\omega \neq \nu$, то частное решение X уравнения (1) надо искать в виде

$$X = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Так как при этом мы имеем:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t, \\ \frac{d^2 X}{dt^2} &= -\omega^2 A \cos \omega t - \omega^2 B \sin \omega t,\end{aligned}$$

то, подставив в уравнение (1), получим:

$$(\nu^2 - \omega^2) A \cos \omega t + (\nu^2 - \omega^2) B \sin \omega t = \mu \sin \omega t.$$

Отсюда следует, что

$$A = 0, \quad B = \frac{\mu}{\nu^2 - \omega^2},$$

и поэтому

$$X = \frac{\mu}{\nu^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

Наконец, сложив u и X , мы получим общее решение уравнения (1):

$$x = a \cos \nu(t - \delta) + \frac{\mu}{\nu^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (4)$$

Из формулы (4) видно, что движение материальной точки представляет результат наложения собственного колебания системы и вынужденного колебания, вызванного действием возмущающей силы.

В том случае, когда $\omega = \nu$ и, значит, правая часть уравнения (1) есть $\mu \sin \nu t$, частное решение X уравнения (1) надо искать в виде

$$X = At \cos \nu t + Bt \sin \nu t,$$

откуда, дифференцируя дважды, найдем:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= (A + B\nu t) \cos \nu t + (B - A\nu t) \sin \nu t, \\ \frac{d^2 X}{dt^2} &= (2B\nu - A\nu^2 t) \cos \nu t - (2A\nu + B\nu^2 t) \sin \nu t,\end{aligned}$$

а затем, подставив в уравнение (1), получим:

$$2B\nu \cos \nu t - 2A\nu \sin \nu t = \mu \sin \nu t.$$

Отсюда имеем:

$$B = 0, \quad A = -\frac{\mu}{2\nu},$$

и поэтому

$$X = -\frac{\mu}{2\nu} t \cos \nu t.$$

Следовательно, в этом случае общее решение данного уравнения (1) есть

$$x = a \cos \nu (t - \delta) - \frac{\mu}{2\nu} t \cos \nu t. \quad (5)$$

Второе слагаемое в правой части формулы (5) показывает, что абсолютная величина x при $t \rightarrow \infty$ неограничена. Это означает, что при $\omega = \nu$, т. е. при совпадении частоты возмущающей силы с частотой собственных колебаний системы, размах колебания материальной точки неограниченно возрастает с течением времени. В физике это явление называется резонансом.

ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Предисловие</i>	2
------------------------------	---

РАЗДЕЛ I

РЯДЫ

Глава I. Числовые ряды

§ 1. Основные понятия	3
§ 2. Необходимое и достаточное условие сходимости	6
§ 3. Абсолютная и условная сходимость	8
§ 4. Интегральный признак сходимости ряда	15
§ 5. Перестановка членов ряда	20

Глава II. Функциональные ряды

§ 1. Область сходимости и равномерная сходимость функционального ряда	27
§ 2. Непрерывность суммы функционального ряда	30
§ 3. Интегрирование функциональных рядов	32
§ 4. Дифференцирование функциональных рядов	34

Глава III. Степенные ряды

§ 1. Интервал сходимости	36
§ 2. Равномерная сходимость степенного ряда	39
§ 3. Дифференцирование степенных рядов	40
§ 4. Ряд Тейлора	43
§ 5. Вычисление логарифмов	52
§ 6. Разложение бинома	55
§ 7. Разложение в ряд $\arcsin x$	60
§ 8. Вычисление интегралов при помощи рядов	61

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Глава I. Дифференцирование функций нескольких переменных

§ 1. Основные понятия	64
§ 2. Частные производные	71
§ 3. Полный дифференциал	74
§ 4. Производные сложных функций	79
§ 5. Дифференциалы сложных функций	83
§ 6. Касательная плоскость	86
§ 7. Частные производные высших порядков	91
§ 8. Дифференциалы высших порядков	96
§ 9. Формула Тейлора	100
§ 10. Неявные функции	103
§ 11. Максимумы и минимумы функций нескольких переменных	111
§ 12. Условные экстремумы	119

Глава II. Кратные интегралы

§ 1. Задачи, приводящие к двойным интегралам	123
§ 2. Понятие квадратуемой фигуры	125
§ 3. Определение двойного интеграла	134
§ 4. Свойства двойного интеграла	136
§ 5. Существование двойного интеграла	139
§ 6. Вычисление двойного интеграла	147
§ 7. Замена переменных в двойном интеграле	157
§ 8. Двойной интеграл в полярных координатах	161
§ 9. Тройной интеграл	165
§ 10. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических координатах	171

Глава III. Применения двойных и тройных интегралов

§ 1. Вычисление объемов тел и площадей плоских фигур . . .	176
§ 2. Площадь поверхности	181
§ 3. Момент инерции и центр тяжести плоских фигур	185
§ 4. Момент инерции и центр тяжести поверхностей	189
§ 5. Момент инерции и центр тяжести тел	195

Глава IV. Криволинейные интегралы

§ 1. Задача о работе силового поля	198
§ 2. Понятие криволинейного интеграла	200
§ 3. Существование и свойства криволинейных интегралов	201
§ 4. Формула Грина	208
§ 5. Площадь плоской фигуры	212
§ 6. Условие независимости криволинейного интеграла от формы пути интегрирования	213
§ 7. Условия полного дифференциала	217
§ 8. Криволинейное интегрирование как операция, обратная дифференцированию	222
§ 9. Потенциальное поле	223

РАЗДЕЛ III

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Основные понятия	225
----------------------------	-----

Глава I. Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешимые в квадратурах

§ 1. Уравнения в полных дифференциалах	231
§ 2. Уравнения с разделяющимися переменными	234
§ 3. Однородные уравнения	238
§ 4. Уравнения, приводящиеся к однородным	243
§ 5. Линейные уравнения	247
§ 6. Уравнение Бернулли	249

Глава II. Теоремы существования и единственности

§ 1. Поле направлений	252
§ 2. Метод Эйлера	253
§ 3. Доказательство теоремы существования и единственности методом последовательных приближений	255

Глава III. Уравнения, не разрешенные относительно производной

§ 1. Уравнения, разрешенные относительно одной из переменных	264
§ 2. Уравнение Клеро	274
§ 3. Особые решения	277
§ 4. Задачи о траекториях	285

Глава IV. Уравнения высших порядков

§ 1. Теорема существования и единственности	289
§ 2. Некоторые виды уравнений, допускающих понижение порядка	291

Глава V. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

§ 1. Определения. Свойства линейного дифференциального оператора	302
§ 2. Свойства однородных линейных уравнений	305
§ 3. Общее решение. Фундаментальная система. Определитель Вронского	306
§ 4. Понятие линейной независимости функций	309
§ 5. Условие линейной независимости решений однородного линейного уравнения	311
§ 6. Формула Остроградского	314
§ 7. Неоднородное линейное уравнение	317
§ 8. Метод вариации произвольных постоянных	319

Глава VI. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

§ 1. Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами	323
§ 2. Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами	333
§ 3. Резонанс	343

Николай Адрианович Фролов
КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

часть 2

Редактор *В. Г. Долгополов*
Художник *Г. В. Лаврухина*
Художественный редактор *Б. Л. Николаев*
Технический редактор *Т. Н. Зыкина*
Корректор *Т. Н. Смирнова*

* * *

Сдано в набор 9/VII 1962 г.
Подписано к печати 27/X 1962 г.
Бумага $84 \times 108^{1/32}$. Печ. л. 22 (18,04). Уч.-изд.
л. 15,06. Тираж 42000 экз. Заказ 1669.
Цена без переплета 45 коп., переплет 15 коп.

* * *

Учпедгиз. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Ленинградский совет народного хозяйства.
Управление целлюлозно-бумажной и полиграфической промышленности. Типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького,
Ленинград, Гатчинская, 26.

Н.А. Фролов

КУРС
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
АНАЛИЗА



УЧПЕДГИЗ · 1963